Valeur de Shapley

Solution classique d'un jeu coopératif à utilité transférable à n joueurs

FIG. 1 – Lloyd Shapley (1923–)

Comme la solution de négociation de Nash, la valeur de Shapley (1953) est un concept de solution (existence et unicité) vérifiant certaines propriétés (axiomes)

Concept de solution adapté aux problèmes de partage de ressources ou de répartition des coûts (télécommunications, copropriété, ...)

Fonction caractéristique

$$\begin{aligned} v : 2^N \backslash \emptyset &\to \mathbb{R}_+ \\ S &\mapsto v(S) \end{aligned}$$

On cherche une solution

$$\varphi(v) = (\varphi_i(v))_{i \in N}$$

$\varphi_i(v)$ est un indice de pouvoir du joueur i / une valeur du jeu pour le joueur i

Axiomes

- **Axiome 1. Pareto optimalité (PAR).**

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v) = v(N)$$

- **Axiome 2. Symétrie (SYM).** Si i et j sont symétriques (substituts), i.e.,

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall\, S \not\ni i, j$$

alors $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$

✥ **Axiome 3. Axiome du joueur nul (NUL).** Si i est nul, i.e.,

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall\, S \not\ni i$$

$$\text{alors} \quad \varphi_i(v) = 0$$

✥ **Axiome 4. Linéarité (LIN).** On définit $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$. Alors,

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

(Simplicité mathématique, mais pas d'interprétation claire)

Théorème de Shapley. Il existe une et une seule solution φ satisfaisant les axiomes 1 à 4. Elle se calcule explicitement :

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n\,!} \sum_R \left[v(S_i^R \cup \{i\}) - v(S_i^R) \right]$$

où R parcourt l'ensemble de toutes les $n\,!$ permutations de N

et $S_i^R \subseteq N$ est la coalition des joueurs qui précèdent i dans l'ordre R $(v(\emptyset) = 0)$

↪ $\varphi_i(v)$ est une somme pondérée des contributions marginales du joueur i

Exemples. (3 joueurs)

- *Majorité simple / unanimité*

PAR + SYM $\Rightarrow \varphi_1(v) = \varphi_2(v) = \varphi_3(v) = 1/3$

- *Dictateur* (joueur 2)

PAR + NUL $\Rightarrow \varphi_1(v) = \varphi_3(v) = 0$ et $\varphi_2(v) = 1$

- *Droit de veto* (du joueur 2)

PAR + SYM $\Rightarrow \varphi_1(v) = \varphi_3(v) = [1 - \varphi_2(v)]/2$

On utilise la formule pour calculer $\varphi_2(v)$:

$3\,! = 6$ ordres possibles	Contributions marginales du joueur 2
123	$v(12) - v(1) = 1$
132	$v(132) - v(13) = 1$
213	$v(2) - v(\emptyset) = 0$
231	$v(2) - v(\emptyset) = 0$
312	$v(312) - v(31) = 1$
321	$v(32) - v(3) = 1$

$$\Rightarrow \;\; \varphi_2(v) = 4/6 = 2/3$$

$$\Rightarrow \;\; \varphi(v) = (1/6, 2/3, 1/6)$$

Proposition. *Si le jeu est superadditif alors la valeur de Shapley satisfait la rationalité individuelle :*

$$\varphi_i(v) \geq v(i) \quad \forall\, i \in N$$

Preuve. Superadditivité $\Rightarrow v(S_i^R \cup \{i\}) \geq v(S_i^R) + v(i) \Rightarrow$
$v(S_i^R \cup \{i\}) - v(S_i^R) \geq v(i) \Rightarrow \varphi_i(v) = \frac{1}{n\,!} \sum_R [v(S_i^R \cup \{i\}) - v(S_i^R)] \geq v(i)$ □

Valeur de Shapley dans les jeux simples

Jeux simples : $v(S) = 0$ ou 1 pour tout S $+$ Monotonie ($T \subseteq S \Rightarrow v(T) \leq v(S)$)

Le joueur i est pivot dans l'ordre R si $v(S_i^R) = 0$ et $v(S_i^R \cup \{i\}) = 1$

➡ $\varphi_i(v) = \dfrac{\text{nb d'ordres où } i \text{ est pivot}}{n\,!}$

Jeux électoraux et pouvoir politique

Jeu pondéré :

On donne un poids $q_i \geq 0$ à chaque joueur i

Quota Q, où $\sum_{i \in N} q_i \geq Q > \sum_{i \in N} q_i/2$

La coalition S est gagnante ($v(S) = 1$) ssi $\sum_{i \in S} q_i \geq Q$

Exemples

- **1 grand parti et 3 petits partis.**

Grand parti : 1/3 de l'électorat $q_1 = 1/3$

Petit parti : 2/9 de l'électorat $q_2 = q_3 = q_4 = 2/9$

Quota $Q = 1/2$ (majorité simple)

Coalitions gagnantes minimales : 1 grand + 1 petit ou 3 petits

4 positions possibles et équiprobables pour le grand parti

Positions pivot : 2ème et 3ème $\Rightarrow \varphi_1(v) = 1/2 > q_1 = 1/3$

$$\Rightarrow \quad \varphi(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

- **2 grands partis et 3 petits partis.**

Grand parti : 1/3 de l'électorat $q_1 = q_2 = 1/3$

Petit parti : 1/9 de l'électorat $q_3 = q_4 = q_5 = 1/9$

Coalitions gagnantes minimales : 1 grand + 2 petits ou 2 grands

4 configurations d'ordre possibles et équiprobables pour un grand parti, avec 5 positions équiprobables chacune

$$\begin{array}{ccccccccc}
\hline\hline
 & \large\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\
N & & \overset{\uparrow}{P} & & \overset{\uparrow}{P} & & N & & N \\
\hline
 & \bullet & & \large\bullet & & \bullet & & \bullet & \\
N & & N & & \overset{\uparrow}{P} & & N & & N \\
\hline
 & \bullet & & \bullet & & \large\bullet & & \bullet & \\
N & & N & & \overset{\uparrow}{P} & & N & & N \\
\hline
 & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \large\bullet & \\
N & & N & & \overset{\uparrow}{P} & & \overset{\uparrow}{P} & & N \\
\hline\hline
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1(v) = \varphi_2(v) = 6/20 = 3/10 < q_1 = q_2 = 1/3$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(v) = \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}\right)$$

- **2 grands partis et n petits partis, $n \to \infty$.**

4 configurations d'ordre possibles et équiprobables :

❶ 1 et 2 sont tous les deux dans la première moitié de l'ordre

❷ 1 et 2 sont tous les deux dans la deuxième moitié de l'ordre

❸ 1 est dans la première moitié et 2 dans la deuxième moitié

❹ 2 est dans la première moitié et 1 dans la deuxième moitié

1 est pivot uniquement dans la configuration ❶ s'il vient après 2, et dans la configuration ❷ s'il vient avant 2, soit dans $1/8 + 1/8 = 1/4$ des situations

$$\Rightarrow \quad \varphi(v) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \cdots\right)$$

Les petits partis ont-ils intérêt à s'unir ?

Non, car le jeu serait symétrique $\Rightarrow$ les petits partis se partageraient $1/3$ au lieu de $1/2$

Paradoxe des nouveaux membres au Conseil de l'Union Européenne

	1958		1973	
Membres	Poids	Val. Shapley	Poids	Val. Shapley
France	4	0.233	10	0.179
Allemagne	4	0.233	10	0.179
Italie	4	0.233	10	0.179
Belgique	2	0.150	5	0.081
Pays-Bas	2	0.150	5	0.081
Luxembourg	1	0.000	2	0.010
Danemark	–	–	3	0.057
Irlande	–	–	3	0.057
Royaume-Uni	–	–	10	0.179
Quota	12 sur 17		41 sur 58	

Paradoxe des nouveaux membres au Conseil de l'Union Européenne

	1958		1973	
Membres	Poids	Val. Shapley	Poids	Val. Shapley
France	4	0.233	10	0.179
Allemagne	4	0.233	10	0.179
Italie	4	0.233	10	0.179
Belgique	2	0.150	5	0.081
Pays-Bas	2	0.150	5	0.081
Luxembourg	1	0.000	2	0.010
Danemark	–	–	3	0.057
Irlande	–	–	3	0.057
Royaume-Uni	–	–	10	0.179
Quota	12 sur 17		41 sur 58	

Luxembourg : joueur nul en 1958. En 1973, poids relatif $\searrow$ mais pouvoir $\nearrow$

Autres indices de pouvoir

Indice de Banzhaf.

Le joueur i est un joueur clé dans la coalition $S \ni i$ si $v(S \backslash \{i\}) = 0$ et $v(S) = 1$

$s_i(v)$: nombre de coalitions $S \subseteq N$ où le joueur i est un joueur clé

$$\beta_i(v) = \frac{s_i(v)}{\sum_{i \in N} s_i(v)}$$

↪ Nombre relatif de coalitions où le joueur i est un joueur clé

Exemple. (Droit de veto du joueur 2) $(q_1, q_2, q_3) = (1, 2, 1)$ $Q = 3$

Coalitions gagnantes (joueurs clés soulignés) : $\underline{1}\,\underline{2}$ $\underline{2}\,\underline{3}$ $1\,\underline{2}\,3$

$$\Rightarrow \; s_1 = s_3 = 1, \; s_2 = 3, \; \sum_i s_i = 5$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \neq \varphi = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$