Les effets de la congestion sur la ségrégation dans les modèles de formation endogène de juridictions

11 octobre 2013

Résumé

Cet article étudie les propriétés ségrégatives de la production de biens publics locaux en présence d'effets de congestion. Les ménages vivant au même endroit forment une juridiction dont le but est de produire un bien public local, dont le financement est assuré grâce à une taxe proportionnelle au revenu. Le taux de la taxe est déterminé grâce à un vote majoritaire. Les ménages peuvent quitter leur juridiction pour une autre, afin d'augmenter leur utilité. En partant des résultats obtenus par Gravel et Thoron, nous examinerons les effets de la congestion, qui, bien que semblant accroître les propriétés ségrégatives de la formation endogène de juridictions, ne modifient pas la condition nécessaire et suffisante pour que toute structure de juridiction stable soit également stratifiée, à condition du moins que la congestion ne soit pas trop forte.

Congestion effects on endogenous jurisdictions formation models

This paper analyses the segregative properties of local public goods production. Households living at the localization form a municipality, that will produce a local public good, financed through a proportional income tax. The tax rate is determined by the majority voting rule. Households may leave their municipality for another one that would increase their utility. Starting from Gravel and Thoron's results, we examine the effects of congestion on urban segregation, that do not modify the necessary and sufficient condition to have every stable jurisdiction structure segregated, at least if congestion effects are not too strong, even though it seems to increase the segregative properties of endogenous jurisdictions formation.

Classification JEL: C78; D02; H73; R23
Mots clés: Juridictions; Ségrégation; Congestion

1 Introduction

Dans la plupart des pays, l'importance des collectivités locales en matière de production de bien public est substantielle : les dépenses publiques locales représentent une part importante de la dépense publique (près de 50% aux Etats-Unis), et cette proportion est en constante augmentation depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale. Simultanément au rôle croissant joué par les administrations locales, un autre phénomène est apparu: les zones urbaines semblent être plus stratifiées en termes de richesse de leurs habitants entre les juridictions qui les composent (voir par exemple Madden[2004] ou Epple [2006]).

Une explication possible à ce phénomène est apportée par Tiebout dans son fameux article [1956]. Selon ses intuitions, les individus choisissent leur lieu de résidence en fonction des niveaux d'impôts locaux et des services publics fournis localement. La formation de la structure juridictions est donc un processus endogène, en raison de la libre circulation des ménages, qui peuvent "voter avec leurs pieds", c'est-à-dire quitter leur juridiction à une autre, s'ils peuvent augmenter leur utilité en déménageant dans une autre juridiction avec un taux de taxe et ne quantité de services publics différents. Il existe une importante littérature portant sur la formation endogène de juridictions à la Tiebout. Une croyance assez répandue est que le processus de formation endogène génère de ségrégation.

Cet article considèrera la notion de ségrégation proposé par Ellickson[1971] : pour chaque couple de juridictions, le ménage le plus riche de la commune pauvre est plus pauvre que le ménage le plus pauvre de l'autre commune.

En termes algébriques, une structure de juridictions sera stratifiée si chaque juridiction est composé d'un sous-ensemble connexe de l'ensemble des ménages, ordonnés en fonction de leur revenu.

Westhoff[1977] a été l'un des premiers économistes à fournir un modèle basé sur les intuitions de Tiebout. Dans ce modèle, les ménages peuvent consommer deux types de biens différents, un bien public local, financé par une taxe locale assise sur la richesse, qui est un bien-club pur (seuls les ménages vivant dans la juridiction qui l'a produit peuvent consommer le bien public local, qui est parfaitement non-rival), et un bien composite privé, correspondant au revenu après impôt. Westhoff trouva une condition assurant l'existence d'un équilibre. Cette condition est l'ordonnancement des pentes des courbes d'indifférence des ménages par rapport à leur revenu dans le plan taux de taxe - quantité de bien public. Si cette condition est respectée, non seulement un équilibre existe (voire plusieurs), et à l'équilibre, la structure de juridictions sera stratifiée, selon la définition proposée ci-dessus.

Gravel et Thoron[2007] ont identifié une condition nécessaire et suffisante pour que chaque structure de juridictions stable soit stratifiée : le bien public doit être, pour tout niveau des prix et de revenu, soit toujours un complément, soit toujours un substitut au bien privé. Cette condition, appelée la condition de Substituabilité / Complémentarité Brute (SCB), est équivalente à ce que le taux d'imposition préféré des ménages soit une fonction monotone de leur revenu, quelque soient le niveau de la base fiscale et leur revenu. Biswas, de Gravel et Oddou[2012] ont intégré un gouvernement mettant en oeuvre une politique de péréquation fiscale entre les juridictions. Ils ont constaté que la condition SCB reste nécessaire et suffisante. C'est également le cas quand un marché foncier est introduite (voir Gravel et Oddou[2011]). Cependant, aucun de ces modèles ne supposent l'existence d'effets de congestion.

Or, comme l'ont montré Epple et al.[2006], la mobilité des ménages semble conduire à la ségrégation lorsque la congestion est prise en compte. On peut remarquer que la calibration des préférences des ménages utilisée dans leur article respecte la condition de la condition SCB. Wooders ([1978] et [1980]) a fourni plusieurs généralisations du modèle de Westhoff, en relâchant certaines hypothèses telles que la non-rivalité des biens publics locaux. Elle suppose que le bien public souffre de congestion (appelé ici "effet d'éviction"), ce qui signifie que l'utilité des ménages diminue avec le nombre de personnes qui consomment le bien public, pour une quantité donnée de produit bien public. Ces modèles rapprochent la théorie des intuitions de Tiebout, dans le sens où les effets d'éviction sont autorisés dans l'article de Tiebout pour justifier son hypothèse que les communes ne seraient pas trop peuplées.

Cet article prend pour point de départ le modèle de Gravel & Thoron, puis introduit les effets de congestion dont un bien public local est susceptible de souffrir. Le but de cette généralisation est d'étudier si la congestion favorise ou, au contraire, limite les propriétés ségrégatives de la formation endogène de juridictions. La congestion des services publics locaux sera introduite selon la modélisation de [1988], qui présente le double avantage de la simplicité et de la notoriété en économie urbaine.

Le principal résultat de cet article tient en une phrase : la condition nécessaire et suffisante pour que toute structure de juridiction stable soit stratifiée n'est pas affectée par l'introduction de la congestion des services publics locaux, du moins s'ils ne souffrent pas "trop" de ces effets de congestion.

Cela ne signifie pas pour autant que l'introduction de la congestion n'a aucun effet sur l'équilibre du modèle. En effet, une structure de juridiction stable sans effet de congestion peut devenir instable dès lors que la congestion est introduite.

Le modèle général est présenté dans la section suivante. La section 3 présente un exemple montrant comment les effets de congestion affecte la formation de juridictions. La section 4 décrira les résultats obtenus. Enfin, la section 5 conclura.

2 Le modèle

Nous considérons un modèle *à la* Gravel & Thoron, dans lequel nous intégrons les effets de congestion. L'économie est composée d'un continuum d'agents sur l'intervalle $[0;1]$, muni de la mesure de Lebesgue λ. Cette économie est caractérisée par trois éléments.

Le premier élément est la distribution de revenus des ménages. Cette distribution est modélisée par un fonction mesurable au sens de Lebesgue $R:[0;1]\to\mathbb{R}_+^*$ - le ménage i dispose d'un revenu $R_i\in\mathbb{R}_+$ - R étant une fonction croissante.

Le second élément est la fonction d'utilité des ménages. Les ménages ont des préférences identiques, représentées par une fonction de classe C^2, croissante par rapport à chacun de ses arguments et strictement concave $\begin{array}{rccc} U: & \mathbb{R}^2_{++} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (Z,x) & \mapsto & U(Z,x) \end{array}$ où

- Z est le montant de services publics disponibles,
- x est le montant de bien privé composite.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des fonctions d'utilités respectant les propriétés énoncées ci-dessus.

De manière duale, les préférences pourront également être représentées par les demandes marshalliennes de services publics locaux et de bien privé.

Dïinition 1 *On note respectivement* $Z^M(p_Z, p_x, y)$ *et* $x^M(p_Z, p_x, y)$ *les demandes marshalliennes de services publics locaux et de bien privé lorsque le prix unitaire des services publics locaux est de* p_Z*, celui du bien privé, de* p_x*, et le revenu disponible,* y*.*

Les demandes marshalliennes sont les solutions du programme suivant:

$$\max_{(Z,x)\in \mathbb{R}_+^2} U(Z,x)$$

sous la contrainte $p_Z Z + p_x x \leq y$

Il peut sembler étrange de parler de "demande marshallienne de services publics" dans la mesure où la quantité de services publics locaux consommés par un ménage ne découle pas d'un choix individuel, mais collectif. La demande marshallienne de services publics locaux doit donc être comprise comme une représentation duale des préférences, et non comme une quantité réellement consommée.

L'hypothèse d'unicité des préférences peut être sujette à critiques. Il peut en effet sembler évident que les ménages n'ont pas de préférences identiques en fonction de différents paramètres éxogènes (les ménages avec enfants pourront par exemple vouloir plus de services publics locaux, comme les crèches et les écoles, que ceux sans enfants). Plusieurs articles considèrent des préférences hétérogènes, comme celui de Nechyba [1997]. Malheureusement, l'une des hypothèses suffisantes pour que tout équilibre soit stratifié par rapport au revenu est justement l'unicité des préférences. C'est la raison pour laquelle cet article, comme beaucoup d'articles s'intéressant aux propriétés ségrégatives de la formation endogène de juridictions suppose l'unicité des préférences.

Le troisième élément de l'économie est l'ensemble des lieux de résidence possibles. Chaque ménage doit choisir un unique lieu de résidence parmi l'ensemble fini des lieux de résidence $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$. La possibilité de lieux de résidence vides n'est pas exclue.

L'ensemble de toutes les économies possibles est noté $\Delta = (R, \mathbb{U}, \mathbb{L})$.

Les ménages de l'économie doit choisir un unique lieu de résidence. Les ménages vivant au même endroit forment une juridiction. On note $J \subseteq \mathbb{L}$ l'ensemble des juridictions, avec $card(J) = M$. La masse de ménage résidant dans la juridiction j est donnée par $\mu_j \in \mathbb{R}_+ = \lambda(\{i : i \in I_j\})$, où I_j est l'ensemble des ménages résidant dans la juridiction j . Chaque juridiction a pour but la production de services publics locaux. La quantité de services publics produits par la juridiction j est donnée par

$$Z_j = \frac{t_j R_j}{C_j}$$

avec :

- t_j, le taux de taxe local,
- $\overline{R}_j = \int_{i\in j} R_i$, le revenu agrégé de la juridiction j, autrement dit sa base fiscale,
- C_j, la mesure de congestion.

La mesure de la congestion est définie comme une fonction de la masse de ménage de la juridiction: $\begin{array}{llll} C_j : & \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \mu_j & \mapsto & 1+\mu^{\alpha} \end{array}$, avec $\alpha \in [0;1[$. Bien que les résultats soient robustes à l'utilisation d'autres fonctions de mesure de congestion, cette modélisation présente le double avantage d'être proche de celle utilisée dans la littérature existante (voir par exemple Oates [10]) et de simplifier les preuves à venir. Le fait que le paramètre α soit strictement inférieur à 1 joue un rôle crucial dans la preuve de la nécessité de la condition SCB pour que chaque structure de juridiction stable soit stratifiée, mais n'intervient pas dans la preuve de la suffisance.

Maintenant que les éléments caractérisant une économie ainsi que le fonctionnement des juridictions ont été introduits, nous pouvons définir la notion de structure de juridiction.

Dïinition 2 *Une structure de juridictions est un ensemble* $(J,\{\mu_j\}_{j\in J};\{t_j\}_{j\in J})$.

Une structure de juridictions est donc définie par l'ensemble des juridictions, la répartition des ménages parmi toutes ces juridictions, et enfin le vecteur des taux de taxe de chacune des juridictions.

Pour simplifier les définitions et preuves à suivre, nous allons noter $F_j = \dfrac{\overline{R}_j}{C_j}$ comme le potentiel fiscal de la juridiction j, c'est-à-dire la quantité maximale de services publics que la juridiction j pourrait produire (si $t_j = 1$).

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle le taux de taxe d'une juridiction est choisi de manière démocratique. Par conséquent, chaque ménage doit déterminer son taux de taxe préféré (celui qui maximise son utilité), qui est une fonction $\begin{array}{llll} t^*: & \mathbb{R}_+^2 & \to & [0;1] \\ & (F,R_i) & \mapsto & t^*(F,R_i) \end{array}$

Formellement, $t^*(F,R_i) \in \arg\max_{t\in[0;1]} U(tF;(1-t)R_i)$

Lemme 1 *Pour toute fonction d'utilité* $U \in \mathcal{U}$, $\forall (F,R_i)\in \mathbb{R}_+^2$, *les préférences sont unimodales par rapport à* t, *donc* $t^*(F,R_i)$ *existe.*

Proof. La preuve de ce lemme peut être facilement obtenu en montrant que la fonction $U(tF;(1-t)R_i)$ est strictement concave par rapport à t, donc il existe un unique $t^* \in \arg\max_{t\in[0;1]} U(tF,(1-t)R_i)$

Soit la fonction $\begin{array}{llll} g_{ij}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & g_{ij}(t) \end{array} = U(tF;(1-t)R_i)$ qui représente l'utilité d'un ménage i vivant dans une juridiction disposant d'un potentiel fiscal F, en fonction du taux de taxe.

La dérivée première de cette fonction par rapport à t est $g_{ij}'(t) = FU_Z(.) - R_iU_x(.)$

On a donc:

$$g_{ij}''(t) = F^2U_{ZZ}(.) - 2FR_iU_{Zx}(.) + R_i^2U_{xx}(.)$$

Cette expression peut être obtenue en pré-multipliant et en post-multipliant la matrice Hessienne de la fonction d'utilité U par le vecteur $[F,-R_i]$. Puisque $U(Z,x)$ est strictement concave, sa matrice Hessienne est définie négative, donc l'expression ci-dessus est négative. Par conséquent, la fonction $g_{ij}(t)$ est strictement concave sur l'intervalle $[0;1]$, ce qui implique qu'il existe un unique t^* qui maximise cette fonction.

Comme nous limitons notre analyse aux structures de juridictions stables, nous allons présenter la définition de la stabilité utilisée dans cet article.

Dïinition 3 *une structure de juridiction* $\Omega = (J, \{\mu_j\}_{j\in J}; \{t_j\}_{j\in J})$ *dans l'économie* $(R, U, \mathsf{L}) \in \Delta$ *est **stable** si et seulement si:*

1. $\forall j, j' \in J, \forall i \in I_j, U(Z_j, (1-t_j)R_i) \geq U(Z_{j'}, (1-t_{j'})R_i)$,
2. $\forall j \in J, Z_j = \dfrac{t_j \overline{R}_j}{C_j}$,
3. $\forall j \in J, t_j$ est le taux de taxe préféré de l'électeur médian dans la juridiction j.

Littéralement, une structure de juridictions est stable si et seulement si :

1. aucun ménage ne peut accroître son utilité en changeant de juridiction,
2. chaque juridiction présente un budget équilibré,
3. le taux de taxe de chaque juridiction est celui choisi par l'électeur médian de la juridiction.[1].

Présentons maintenant la définition de la ségrégation, qui est la même que celle utilisée par Westhoff [12].

Dïinition 4 *Une structure de juridictions stable* $\Omega = (J, \{N_j\}_{j\in J}, \{t_j\}_{j\in J})$ *au sein de l'économie* (R, U, L) *est **stratifiée** si et seulement si* $\forall R_h, R_i, R_k \in \mathsf{R}_+$ *tels que* $R_h < R_i < R_k$, $(h,k) \in N_j$ *et* $i \in N_{j'} \Rightarrow Z_j = Z_{j'}$ *et* $t_j = t_{j'}$

Littéralement, une structure de juridictions est stratifiée si et seulement si, mis à part les juridictions disposant de la même qantité de services publics et appliquant le même taux de taxe, chaque juridiction doit être composée d'un sous-ensemble connexe de l'ensemble des ménages, c'est-à-dire que si deux ménages ayant des niveaux de revenus différents obtiennent leur utilité maximale dans la juridiction j, alors tout ménage dont le revenu est compris ces deux niveaux de revenu doit également obtenir son utilité maximale dans la juridiction j. Autrement dit, le ménage le plus pauvre d'une juridiction avec un revenu moyen par habitant donné est au moins aussi riche que le ménage le plus riche de n'importe quelle juridiction avec un revenu moyen par habitant plus faible.

3 Exemple

Cette section présente un exemple d'économie dans laquelles les effets de congestion sont

[1] Comme dans l'article de Gravel et Thoron [6], les résultats seraient robustes à d'autres règles de choix social, mais le vote majoritaire semble être l'hypothèse la plus réaliste.

introduits, pour éxaminer leur impact sur la structure de jurictions à l'équilibre. L'exemple montre que la congestion semble augmenter les propriétés ségrégatives de la formation endogène de juridictions.

Dans cet exemple, nous partons d'une situation où la structure de juridictions est stable et non-stratifiée lorsque les effets de congestion sont exclus. Puis, nous introduisons la congestion. La structure devient alors instable. La nouvelle structure de juridictions qui résulte des mouvements de populations est stable et stratifiée.

Considérons l'exemple de l'article de Gravel & Thoron. Les préférences des ménages sont représentées par la fonction d'utilité

$$U(Z,x)=\begin{cases}\ln(Z)+4x-x^2 & si\ x\leq 2\\ \ln(Z) & sinon\end{cases}$$

Cette fonction d'utilité est de classe C^2, faiblement croissante par rapport à chaque argument et concave. Considérons une économie composée de deux juridictions, j_1 et j_2, et d'un continuum de ménages sur l'intervalle [0;1] et de la distribution de revenus suivante:

- si $i\in[0;a], R_i=2-\sqrt{2}$ et $\mu_a=\lambda([0;a])=\dfrac{11.9}{2-\sqrt{2}}$,
- si $i\in]a;b], R_i=\dfrac{3}{2}$ et $\mu_b=\lambda(]a;b])=8$,
- si $i\in]b;1], R_i=2{,}7$ et $\mu_c=\lambda(]b;1])=\dfrac{1}{27}$.

Pour $x\leq 2$,la fonction de taux de taxe préféré est donnée par

$$t^*(F,R_i)=\frac{R_i-2+\sqrt{(R_i-2)^2+2}}{2R_i}$$

Ici, la fonction de taux de taxe préféré ne dépend pas de F, ce qui simplifiera grandement l'exemple. Il n'est pas nécessaire de déterminer la fonction de taux de taxe préféré si $x>2$, car ce ne sera le cas pour aucun des ménages dans cet exemple.

Excluons tout d'abord les effets de congestion. Ainsi, le montant de services publics est égal à la recette fiscale: $Z_j=t_j\overline{R}_j$. Supposons que les ménages appartenant aux intervalles $[0;a]$ et $]b;1]$ résident dans la juridiction j_1 ,et que les ménages appartenant à l'intervalle $]a;b]$ vivent dans la juridiction j_2. La base fiscale de chaque juridiction sera alors de 12. Le taux de taxe de la juridiction j_1, noté t_1, sera égal à $\dfrac{1}{2}$ (car c'est le taux de taxe préféré des ménages appartenant à l'intervalle $[0;a]$, qui sont majoritaires), alors que $t_2=\dfrac{1}{3}$ (unanimement choisi). Sachant que les effets de congestion sont, dans un premier temps, exclus, on aura $Z_1=6$ et $Z_2=4$. Une telle structure de juridiction est stable, puisque le potentiel fiscal est le même dans chaque juridiction, que les ménage appartenant aux intervalles $[0;a]$ et $]a;b]$ ont le taux de taxe de leur juridiction qui est celui qui maximise leur utilité, et que les ménages appartenant à l'intervalle $]b;1]$ ont une utilité supérieure dans la juridiction j_1 ($ln(6)+\dfrac{14{,}31}{4}\approx 5{,}37$), que s'il déménageaient dans la juridiction j_2 ($ln(4)+3{,}96 \approx 5.35$).

Introduisons maintenant des effets de congestion, avec un coefficient de congestion assez faible $\alpha = 0{,}1$, donc $C_j = 1+\mu_j^0{,}1$, où μ_j représente la masse de ménage vivant dans la juridiction j.

Ainsi, pour $j = \{j_1, j_2\}$, on obtient $Z_j = \dfrac{t_j \overline{R}_j}{1+\mu_j^0{,}1}$.

Les quantités de services publics seront donc approximativement égales à $Z_1 \approx 2{,}55$ dans j_1, et, dans j_2, $Z_2 \approx 1{,}79$. On obtiendra alors les niveaux d'utilité suivants:

	j_1	j_2
$i \in [0;a]$	2,02	1,99
$i \in]a;b]$	3,37	3,58
$i \in]b;1]$	4,51	4,54

Cette structure de juridictions ne sera alors plus stable, car les ménages appartenant à l'intervalle $]b;1]$ auront intérêt à déménager dans la juridiction j_2, les autres ménages restant dans leur juridiction. Suite à ce mouvement, la nouvelle structure de juridiction sera alors stable. Les taux de taxe, ne dépendant pas du potentiel fiscal, resteront les mêmes dans chaque juridiction. Les quantités de services publics évolueront légèrement : $Z_1 \approx 2{,}53$ dans j_1, et, dans j_2, $Z_2 \approx 1{,}81$. On aura alors les niveaux d'utilité suivants:

	j_1	j_2
$i \in [0;a]$	2,01	2,00
$i \in]a;b]$	3,37	3,59
$i \in]b;1]$	4,51	4,55

Cette nouvelle structure de juridictions sera alors stable et stratifiée.

En conclusion, cet exemple suggèrerait que la congestion augmente les propriétés ségrégatives de la formation endogène de juridiction. L'intuition derrière le résultat de cet exemple est que, lors que les effets de congestion sont exclus, le fait, pour un ménage aux revenus élevés, de résider dans la même juridiction que des ménages disposant de faibles revenus n'affecte par leur utilité. En d'autres termes, l'utilité, pour un taux de taxe donné, dépendra positivement du revenu agrégé, mais pas du revenu moyen. Un ménage serait indifférent entre une juridiction composé un seul ménage ayant un revenu d'un million et une juridiction composée d'un million de m n′ ages disposant d'un revenu de 1. Par contre, si des effets de congestion sont introduits, les ménages seront sensibles aux revenus des autres ménages de leur juridiction, les ménages aisés voudront alors vivre avec d'autres ménages aisés.

4 Résultats

Le principal résultat de cet article est robustesse de la condition de monotonie de la fonction du taux de taxe préféré par rapport au revenu suite à la prise en compte des effets de congestion, du moins si le coefficient de congestion n'est pas trop élevé. Pour prouver ce résultat, nous avons tout d'abord montrer que la monotonie de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu est équivalent à ce que les services publics soient soit toujours un substitut, soit toujours un complément au bien privé composite.

Lemme 2 $\forall U \in \mathcal{U}$, $\forall (F, R_i) \in \mathbb{R}_+^2$, *la fonction de taux de taxe préféré est équivalente au rapport de la demande marshalienne de services publics considérée pour un prix unitaire des services publics de* $\frac{1}{F}$*, du bien privé de* $\frac{1}{R_i}$ *et un budget de* 1 *sur le potentiel fiscal:*

$$t^*(F, R_i) \equiv \frac{Z^M(\frac{1}{F}, \frac{1}{R_i}, 1)}{F} \tag{1}$$

Proof. Pour des quantités de services publics et bien privé qui maximisent l'utilité sous contrainte budgétaire, le Taux Marginal de Substitution (TMS) est égal au rapport des prix. Donc:

$$\frac{U_Z(Z, x)}{U_x(Z, x)} = \frac{p_Z}{p_x} \tag{2}$$

La condition de premier ordre de maximisation de l'utilité implique que:

$$\frac{U_Z(t^*F, (1-t^*)R_i)}{U_x(t^*F, (1-t^*)R_i)} = \frac{R_i}{F)} \tag{3}$$

Donc, en utilisant (2) et (3), on sait que:

$$t^*(F, R_i)F \equiv Z^M(\frac{R_i}{F}, 1, R_i) \tag{4}$$

En se servant de la propriété d'homogénéité de degré 0 des fonctions de demandes marshaliennes, on peut diviser chaque argument par R_i.

$$t^*(F, R_i)F \equiv Z^M(\frac{1}{F}, \frac{1}{R_i}, 1) \tag{5}$$

ce qui conduit à 1.

Ce lemme établit qu'il existe une relation linéaire entre la fonction de taux de taxe préféré et la demande marshallienne de services publics. Cette étape est essentielle pour démontrer le lemme suivant, qui stipule que la monotonie de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu est équivalent à ce que les services publics soient soit toujours un substitut, soit toujours un complément au bien privé composite. Cette condition imposée sur les préférences est appelée condition de Substituabilité Complémentarité Brute (SCB).

Dïinition 5 *Si la condition SCB st respectée, alors soit* $\frac{\partial Z^M(p_Z, p_x, R)}{\partial p_x} \leq 0 \forall (p_Z, p_x, R)$ *(si* Z *est un complément brut à* x*) ou* $\frac{\partial Z^M(p_Z, p_x, R)}{\partial p_x} \geq 0 \forall (p_Z, p_x, R)$ *(si* Z *est un substitut brut de* x*).*

Lemme 3 *Pour toute fonction d'utilité appartenant à* $\mathcal{U}$*, la fonction de taux de taxe préféré est monotone par rapport au revenu si et seulement si la condition SCB est respectée.*

Proof. Pour démontrer ce lemme, nous allons montrer que la dérivée de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu est une fonction négative de la dérivée de la demande marshalienne de services publics par rapport au prix du bien privé. Par conséquent, la fonction de taux de taxe préféré sera monotone par rapport au revenu si et seulement si la demande marshallienne de services publics est monotone par rapport au prix du bien privé (ce qui correspond à la condition SCB).

En dérivant (1) par rapport au revenu, on obtient :

$$\frac{\partial t^*(F, R_i)}{\partial R_i} = \frac{-1}{FR_i^2} \frac{\partial Z^M(\frac{1}{F}, \frac{1}{R_i}, 1)}{\partial p_x}$$

donc

$$sign(\frac{\partial t^*(F, R_i)}{\partial R_i}) = -sign(\frac{\partial Z^M(\frac{1}{F}, \frac{1}{R_i}, 1)}{\partial p_x})$$

Ce lemme, dont la preuve ci-dessus est purement mathématique, peut se comprendre de manière plus intuitive. Supposons que les services publics locaux soient un substitut au bien privé. Par définition, plus un ménage dispose d'un revenu élevé, moins il sera prêt à payer pour augmenter la quantité disponible de services publics, et donc il sera moins disposé à dépenser en taxes locales. Cette explication est certes peu rigoureuse d'un point de vue mathématique, mais elle permet de comprendre la logique de la relation monotone entre le taux de taux préféré et la condition de Substituabilité/Complémentarité Brute.

Pour prouver le résultat principal de l'article, il nous faut définir la notion de courbe d'indifférence.

Dïinition 6 $\forall (t, \bar{u}, R_i) \in [0;1] \times \mathbb{R}_+^2$*, on définit* $F^{\bar{u}}(\bar{u}, t, R_i)$*:*

$$U(tF^{\bar{u}}(\bar{u}, t, R_i), (1-t)R_i) \equiv \bar{u}$$

comme la courbe d'indifférence d'un ménage disposant d'un revenu R_i et résidant dans la juridiction j, c'est-à-dire le niveau de potentiel fiscal dont l'individu aurait besoin pour obtenir un niveau d'utilité $\bar{u}$ dans une autre juridiction dont le taux de taxe serait t.

Sous les conditions imposées sur la fonction d'utilité, le théorème des fonctions implicites assure l'existence et la dérivabilité de la fonction F^{u}. La pente de la courbe d'indifférence dans le plan (t,F) est donné par

$$F_t^{\bar{u}}(\bar{u},t),R_i) = \frac{1}{t}[\frac{R_i}{TMS^{\bar{u}}(t\bar{F},(1-t)R_i)} - \bar{F}] \tag{6}$$

Le prochain lemme stipule que la condition SCB implique l'ordonnancement des pentes des courbes d'indifférence dans le plan (t,F) par rapport au revenu.

Lemme 4 *$\forall U \in \mathsf{U}$, on a, $\forall t \in [0;1], \frac{\partial F^{\bar{u}}(\bar{u},t,R_i)}{\partial t} \leq$ (resp. $\geq$) $\frac{\partial F^{\bar{u}}(\bar{u},t,R_k)}{\partial t} R_i < R_k$ si les services publics sont un substitut brut du (resp. un complément brut au) bien privé composite*[2].

Proof. Nous allons prouver ce lemme en utilisant la définition de $F^{\bar{u}}(\bar{u},t,R_i)$ introduite en amont. La preuve est apporté pour le cas d'un complément brut, le cas du substitut brut étant symétrique. Supposons que les services publics soient un complément brut au bien privé. Alors, par définition, $\frac{\partial Z^M(p_Z,p_x,R_i}{\partial p_x} < 0$. Soit $(t,F) \in [0;1] \times \mathsf{R}_+$ une certaine combinaison de taux de taxe et de potentiel fiscal, et $(a,b) \in \mathsf{R}_+^2$ deux niveaux de revenus ($a < b$). On définit $F(a)$ and $R(a)$ tel que

$$Z^M(\frac{1}{F(a)},\frac{1}{R(a)},1) = tF$$

et

$$x^M(\frac{1}{F(a)},\frac{1}{R(a)},1) = (1-t)a$$

Ainsi, le TMS de services publics vers le bien privé, qui est une fonction $TMS^u(Z,x)$, est égale, a l'optimum, au rapport des prix, et, par définition, le panier optimal respecte la contrainte budgétaire, soit :

$$TMS^{\bar{u}}(tF,(1-t)a) = \frac{R(a)}{F(a)} \tag{7}$$

$$\frac{tF}{F(a)} + \frac{(1-t)a}{R(a)} = 1 \tag{8}$$

En combinant (7) et (8), on obtient :

$$\frac{1-t}{F(a)+tF} = \frac{TMS^{\bar{u}}(tF,(1-t)a)}{a}$$

On définit $R(b)$ tel que $\frac{1}{R(b)}$ soit le prix du bien privé le plus élevé qui permettrait à un ménage

---

[2] L'ordonnancement des pentes par rapport au revenu est même équivalent à la condition SCB, mais nous n'aurons besoin que de l'implication pour démontrer nos résultats.

avec un revenu de 1 de pouvoir s'offrir un panier (pas nécessairement le panier optimal) (tF, x), avec $\frac{x}{R(b)} = (1-t)b$, le prix unitaire des services publics restant $\frac{1}{F(a)}$. Etant donné la contrainte budgétaire, on a :

$$R(b) = \frac{F(a)(1-t)b}{F(a)-tF} > R(a) \tag{9}$$

Les services publics étant, par hypothèse, des compléments au bien privé, on doit avoir :

$$Z^M\left(\frac{1}{F(a)}, \frac{1}{R(a)}, 1\right) \leq Z^M\left(\frac{1}{F(a)}, \frac{1}{R(b)}, 1\right)$$

De plus, la pente de la courbe d'indifférence doit être, en valeur absolue, supérieure au rapport des prix $\frac{R(k)}{F(a)}$:

$$TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)b) \geq \frac{R(k)}{F(a)}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)b)}{b} \geq \frac{(1-t)}{F(a)-(tF)}$$

En se servant de l'équation (9), on obtient:

$$\frac{TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)b)}{b} \geq \frac{TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)a)}{a}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)b)} \leq \frac{a}{TMS^{\bar{u}}(tF, (1-t)a)}$$

En utilisant la définition de $F_t^{\bar{u}}$ donnée par l'équation (6), l'implication est établie.

Ce lemme est crucial pour prouver la suffisance du théorème ci-dessous, qui est le principal résultat de cet article. Il implique que les courbes d'indifférence à une juridiction donnée de deux ménages ayant des revenus différents ne se croiseront qu'une seule fois dans le plan (t, F).

Théoreme 1 *Pour toute économie* $(R, U, \mathrm{L}) \in \Delta$, *toute structure de juridiction stable sera stratifiée si et seulement si la fonction de taux de taxe préféré est monotone par rapport au revenu.*

Nous allons commencer par prouver la suffisance de ce théorème.

Condition suffisante Pour toute économie $(R, U, \mathrm{L}) \in \Delta$, **si** la fonction de taux de taxe préféré est une fonction monotone du revenu, alors toute structure de juridiction stable sera stratifiée.

Proof. Pour prouver cette proposition, nous utiliserons le lemme 4 pour montrer que si une structure de juridictions stable est non-stratifiée, alors la condition de monotonie de la fonction de taux de taxe préféré n'est pas respectée. Cette preuve ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire sur le coefficient de congestion.

Supposons qu'il existe deux juridictions j_1 and j_2, caractérisées respectivement par les paramètres (F_1,t_1) et (F_2,t_2), et trois ménages a,b,c, dotés de revenus R_a,R_b,R_c, $R_a < R_b < R_c$, tel que les ménages a et c préfèrent faiblement j_2 à j_1, alors que le ménage b préfère faiblement j_1 à j_2, une inégalité au moins étant stricte (sinon la structure n'est pas stratifiée selon la définition utilisée). Ces préférences sont données par les inégalités suivantes:

$$U(t_1F_1,(1-t_1)a) \leq U(t_2F_2,(1-t_2)a)$$

$$U(t_1F_1,(1-t_1)b) \geq U(t_2F_2,(1-t_2)b)$$

$$U(t_1F_1,(1-t_1)c) \leq U(t_2F_2,(1-t_2)c)$$

Ce qui est représenté graphiquement par le graphique (figure 1) qui suit.

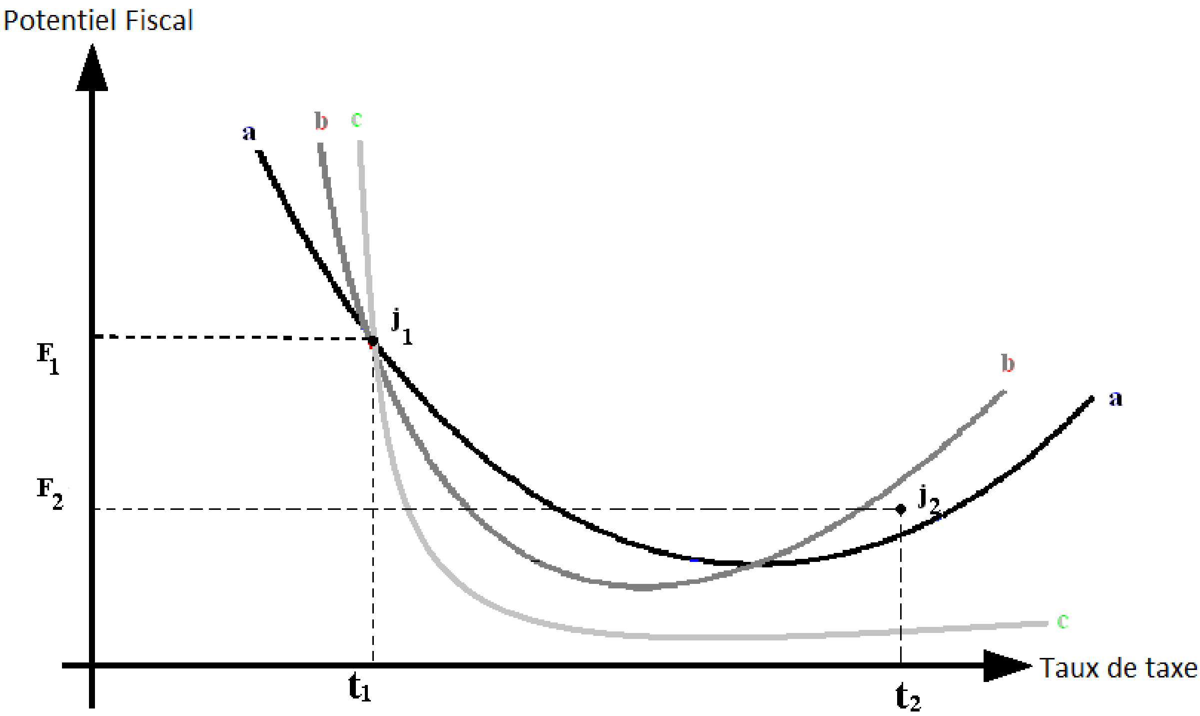

Figure 1: Violation de la condition SCB d'après le lemme 4

Or, selon le lemme 4, cette situation est impossible si la condition SCB est respectée.

On remarque dans la définition de la mesure de congestion n'intervient pas dans cette preuve, qui serait robuste à toute autre mesure de congestion.

Prouvons maintenant que la condition de monotonie de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu est également nécessaire pour que toute structure de juridictions stable soit stratifiée.

Condition nécessaire Pour toute économie appartenant à Δ, toute structure de juridiction stable sera stratifiée **seulement si** la fonction de taux de taxe préféré est monotone par rapport au revenu.

Proof. La preuve de cette proposition consiste à montrer qu'il est toujours possible de construire une structure de juridictions stable et non-stratifiée si la condition n'est pas respectée.

On considère une fonction d'utilité violant la condition de monotonie de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu pour un certain $\overline{F} \in \mathbb{R}_+$ et un intervalle non-dégénéré de revenu $W \subset \mathbb{R}_+$. Il existe alors trois niveaux de revenu $(R_a, R_b, R_c) \in W^3$, avec $R_a < R_b < R_c$, tels que $t^*(\overline{F}, R_a) = t^*(\overline{F}, R_c) > t^*(\overline{F}, R_b)$ (sans perte de généralité). On peut alors créer deux juridictions j_1 et j_2 ayant le même potentiel fiscal égal à $\overline{F}$ et un continuum de ménage sur l'intervalle $[0;1]$ tel que:

- si $i \in [0;a], R_i = R_a, \lambda([0;a]) = \mu_a$ et i réside dans la juridiction j_1,
- si $i \in]a;b], R_i = R_b, \lambda(]a;b]) = \mu_b$ et i réside dans la juridiction j_2,,
- si $i \in]b;1], R_i = R_c, \lambda(]b;1]) = \mu_c$ et i réside dans la juridiction j_1.

Une telle structure de juridictions est stable, puisque $t_1 = t^*(\overline{F}, R_a) = t^*(\overline{F}, R_c)$ et $t_2 = t^*(\overline{F}, R_b)$, et non-stratifiée d'autre part. Montrons maintenant qu'il existe μ_a, μ_b, μ_c tels que le potentiel fiscal de chaque juridiction est égal à $\overline{F}$.

Le potentiel fiscal de la juridiction j_2 est égal à $\frac{\mu_b R_b}{1+\mu_b^\alpha}$.

Si $\mu_b = 0$, le potentiel fiscal de la juridiction est évidemment nul. Sachant que $\alpha < 1$, on a alors

$$\lim_{\mu_b \to +\infty} \frac{\mu_b R_b}{1+\mu_b^\alpha} = +\infty$$

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe une masse $\mu_b^* \in \mathbb{R}_+$ tel que $\frac{\mu_b^* R_b}{1+\mu_b^{*\alpha}} = \overline{F}$.[3] Le même raisonnement peut être appliqué pour montrer pour trouver μ_a et μ_c tels que le potentiel fiscal de la juridiction j_1 est égal à $\overline{F}$[4]. Ainsi, pour toute violation de la

[3] On remarque que cette preuve dépend crucialement du fait que α soit strictement inférieur à 1. Pourtant, cette preuve serait robuste à toute autre mesure de congestion $C(\mu)$ telle que $\lim_{\mu \to +\infty} C'(\mu) = 0$, comme c'est le cas pour la mesure de congestion utilisée dans cet article. Il suffit, pour démontrer cette assertion, d'utiliser le théorème de l'Hospital [1696], qui stipule que la limite d'un rapport de fonction est égale à la limite du rapport des dérivées respectives de ces fonctions, pour montrer que $\lim_{\mu_b \to +\infty} \frac{\mu_b R_b}{C(\mu_b)} = \lim_{\mu_b \to +\infty} \frac{R_b}{C'(\mu_b)} = +\infty$

[4] On peut par exemple supposer que le revenu moyen et la masse totale d'habitants sont les mêmes dans chaque juridiction. Le potentiel fiscal

condition de monotonie de la fonction de taux de taxe préféré par rapport au revenu, et pour tout coefficient de congestion inférieur à 1, il est possible de construire une structure de juridiction stable et non-stratifiée.

5 Conclusion

En conclusion, la congestion semble affecter les propriétés ségrégatives de la formation de juridiction. Si la condition nécessaire et suffisante pour que toute structure de juridictions stable soit stratifiée reste valide suite à la prise en compte des effets de congestion pour des effets de congestion relativement faibles, il est possible que cette condition ne soit plus nécessaire lorsque la congestion est trop forte. Pourtant, le fait que la condition SCB soit suffisante quelque soit la mesure de congestion retenue, mais que la preuve de la nécessité ne soit valable qu'avec une sous-classe de mesures de congestion, pourrait signifier qu'une condition plus faible que la condition SCB serait nécessaire et suffisante. Toutefois, pour pouvoir être affirmatif, il faudrait apporter la preuve que la condition SCB n'est pas nécessaire si la congestion est trop forte, ce que ne fait pas cet article.

Ce résultat, additionné à l'exemple fourni en section 3, suggère que la congestion favorise la ségrégation. Par conséquent, si les pouvoirs publics souhaitaient lutter contre la ségrégation, il serait préférable de décentraliser aux communes des compétences ne souffrant pas ou peu de problème de congestion.

Pour de futures recherches, il serait intéressant de chercher de nouvelles généralisations du modèle qui viendrait affecter la condition nécessaire et suffisante à la ségrégation de toute structure de juridiction stable. Une vérification empirique des résultats obtenus serait également un projet d'intérêt majeur.

References

R. Biswas, N. Gravel, and R. Oddou [2012]. The segregative properties of endogenous jurisdiction formation with a welfarist central governmment. Online first.

S. Calabrese, D. Epple, H. Sieg, and T. Romer [2006]. Local public good provision: Voting, peer effects, and mobility. *Journal of Public Economics*, 90:959–981.

B. Ellickson [1971]. Jurisdiction fragmentation and residential choice. *American Economic Review*, 61:334–339.

Calabrese S., D. Epple, H. Sieg, and T. Romer [2006]. Local public good provision: Voting, peer effects, and mobility. *Journal of Public Economics*, 90:959–981.

sera alors nécessaire le même.

N. Gravel and R. Oddou [2011]. On the segregative properties of endogenous jurisdiction formation with a land market. GRAQAM working paper no 11-45.

N. Gravel and S. Thoron [2007]. Does endogeneous formation of jurisdictions lead to wealth stratification ? *Journal of Economic Theory*, 132:569–583.

G. de L'Hospital [1696]. *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Imprimerie Royale, Paris, 1696.

J. Madden [2004]. *Problem of the century: racial stratification in the United States*. E. Anderson and D. Massey, New York, NY.

T. Nechyba [1997]. Existence of equilibrium in local and hierachical tiebout economies with property tax and voting. *Economic Theory*, 10:277–304.

W. E. Oates [1988]. On the measurement of congestion in the provision of local public goods. *Journal of Urban Economics*, 24.

C. M. Tiebout [1956]. A pure theory of local expenditures. *Journal of Political Economy*, 64:416–424.

F. Westhoff [1977]. Existence of equilibria in economies with a local public good. *Journal of Economic Theory*, 14:84–102.

M. H. Wooders [1978]. Equilibria, the core and jurisdiction structures in economies with local public goods. *Journal of Economic Theory*, 18:328–348.

M. H. Wooders [1980]. The tiebout hypothesis: Near optimality in local public goods economies. *Econometrica*, 48:1467–1486.