Fiche n°1 : Equilibre de court terme et agrégation des fonctions d'offre et de demande

Exercice 1: Equilibre de court terme avec des entreprises à technologie différente:

On considère l'équilibre à court terme d'un marché de concurrence parfaite comprenant 50 entreprises de type 1 et 50 entreprises de type 2. Lorsqu'elle produit une quantité y d'un bien, une entreprise de type 1 supporte des coûts définis par la fontion de coût total $CT_1(y) = y^2 + 16$, et une entreprise de type 2 des coûts définis par la fontion de coût total $CT_2(y) = y^2 + 4y + 9$.

1. Pour chaque type d'entreprise, définir et étudier les fonctions de coût moyen, coût variable moyen et coût marginal.

2. Définir et représenter graphiquement la fonction d'offre du marché (fonction d'offre "coudée").

3. La demande globale du bien (vendu au prix de marché p) par ces deux entreprises est définie par la relation : $D(p) = 1200 - 150p$.

Définir le prix d'équilibre ainsi que la production et le profit de chaque type d'entreprise.

4. A la suite d'une crise sanitaire ayant réduit le revenu des consommateurs, la demande globale sur le marché devient: $D(p) = 525 - 150p$. Que deviennent à l'équilibre le prix de marché et les quantités produites?

5. Calculer et comparer les surplus des consommateurs et des producteurs avant et après le choc de la crise sanitaire sur la demande.

Exercice 2: Equilibre de court terme et agrégation des fonctions de demande:

Sur le marché du sport en salle d'une grande ville, il existe deux types de clientèles: une clientèle plutôt aisée (les consommateurs de type 1) et une clientèle moins fortunée (les consommateurs de type 2).

Les fonctions de demande agrégée $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$ pour la pratique des salles de sport de ces deux segments de clientèle sont les suivantes:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= 10 - p \\ et\ Y_2(p) &= 5 - 5p \end{aligned}$$

avec p le prix de l'heure, et Y_i le nombre d'heures de sport en salle des consommateurs de type i, $i = 1, 2$.

1. Déterminer la fonction de demande agrégée de sport en salle et donner une représentation de la fonction de demande agrégée inverse dans l'espace quantité-prix.

2. Quelle(s) clientèle(s) les salles de sport vont-elles cibler si la fonction d'offre agrégée de l'ensemble des salles de sport de la ville est $Y(p) = \frac{5}{4}p - \frac{5}{4}$? On admettra que le marché du sport en salle est en situation de concurrence pure et parfaite.

Calculer le prix de marché d'une heure de sport et la quantité (nombre d'heures) de sport en salle à l'équilibre.

3. Mêmes questions si la fonction d'offre agrégée de l'ensemble des salles de sport de la ville est $Y(p) = 24p$.

Corrigé:

Exercice 1:

1 et 2. Entreprise 1 : $CT_1(y) = y^2 + 16 \rightarrow CM_1(y) = y + \frac{16}{y}$, de sorte que la fonction de coût moyen atteint un minimum en $y_r = 4$ (en effet, $CM_1'(y) = 1 - \frac{16}{y^2} = 0$ pour $y = 4$; $CM_1(y)$ est une fonction convexe en y : la fonction est décroissante entre 0 et 4 et croissante au-delà de 4). Le seuil de rentabilité d'une entreprise de type 1 est ainsi $p_{r1} = \underset{y}{Min} CM_1(y) = CM_1(4) = 8$.

Par ailleurs, $CVM_1(y) = y$ de sorte que la $CVM_1(y)$ est une droite partant de 0 strictement croissante en y, qui trivialement atteint son minimum en $y_f = 0$ de sorte que le seuil de fermeture vaut $p_{f_1} = \underset{y}{Min} CVM_1(y) = CVM_1(0) = 0$.

La fonction d'offre d'une entreprise de type 1 est issue de la maximisation du profit, donc définie par la relation $p(y) = Cm(y)$. En effet:

$$\underset{y}{Max}\ \pi(y) = p \times y - CT(y)$$

$$\Rightarrow CPO : \ \pi'(y) = p - Cm(y) = 0 \text{ pour une tarification au coût marginal: } p = Cm(y)$$

sous réserve que la CPO soit bien suffisante, ie que $\pi''(y) = -Cm'(y) < 0$ donc que $Cm'(y) > 0$

(profit concave en y $\rightarrow$ on a bien un max là où la dérivée première s'annule)

ici $Cm_2(y) = 2y$ (Rq: on a bien $Cm'(y) > 0$) de sorte que la relation entre la quantité produite et le prix est définie par $p(y) = 2y$ (fonction d'offre inverse). D'où la fonction d'offre individuelle d'une entreprise de type 1:

$$y(p) = \frac{p}{2} \text{ pour tout } p \geq p_{f1} = 0$$

Rq: on est à court terme donc l'entreprise produit une quantité positive (selon la relation $y(p) = \frac{p}{2}$) même lorsqu'elle ne réalise pas de profit, pourvu que ses pertes ne soient pas plus grandes que les pertes qu'elle ferait en mettant la clé sous la porte (auquel cas elle devrait quand même s'acquitter des coûts fixes, égaux à 16). Pour un prix compris entre le seuil de fermeture (p_{f1}) et le seuil de rentabilité (p_{r1}) ie entre 0 et 8, elle fait des pertes inférieures à 16, et au-delà du seuil $p_{r1} = 8$, sa production devient rentable.

Entreprise 2 : $CT_2(y) = y^2 + 4y + 9 \rightarrow CM_2(y) = y + 4 + \frac{9}{y}$, de sorte que la fonction de coût moyen atteint un minimum en $y_r = 3$ (en effet, $CM_2'(y) = 1 - \frac{9}{y^2} = 0$ pour $y = 3$; $CM_2(y)$ est une fonction convexe en y : la fonction est décroissante entre 0 et 3 et croissante au-delà de 3). Le seuil de rentabilité d'une entreprise de type 2 est ainsi $p_{r2} = \underset{y}{Min} CM_2(y) = CM_2(3) = 10$.

Par ailleurs, $CVM_2(y) = y + 4$ de sorte que la $CVM_2(y)$ est une droite strictement croissante en y avec pour ordonnée à l'origine 4, qui trivialement atteint son minimum en $y_f = 0$. Ainsi, le seuil de fermeture vaut $p_{f_2} = CVM_2(y_f) = CVM_2(0) = 4$.

La fonction d'offre inverse d'une entreprise de type 2 est définie par $p(y) = Cm_2(y) = 2y + 4$ (on a bien $Cm'(y) > 0$), d'où la fonction d'offre individuelle d'une entreprise de type 2:

$$y(p) = \begin{cases} \frac{p}{2} - 2 \text{ pour tout } p \geq p_{f2} = 4 \\ 0 \text{ pour tout } p < p_{f2} = 4 \end{cases}$$

Rq: ici, l'entreprise produit selon la relation $y(p) = \frac{p}{2} - 2$: pour un prix compris entre 4 et 10, elle fait des pertes inférieures aux coûts fixes égaux à 9, et au-delà du seuil $p_{r2} = 10$, sa production devient rentable.

D'où la fonction d'offre du marché (composé de 50 entreprises de chaque technologie):

$$S(p) = \begin{cases} 50 \times \frac{p}{2} + 50(\frac{p}{2} - 2) = 50p - 100 \text{ pour tout } p \geq p_{f2} = 4 : \text{ les deux entreprises produisent} \\ 50 \times \frac{p}{2} = 25p \text{ pour tout } p \in [p_{f1}, p_{f2}[= [0, 4[: \text{ seule l'entreprise 1 produit} \end{cases}$$

ou en termes de fonctions d'offres inverses:

$$p(y) = \begin{cases} 2 + \frac{Y}{50} \text{ pour tout } p \geq p_{f2} = 4 : \text{ les deux entreprises produisent} \\ \frac{Y}{25} \text{ pour tout } p \in [p_{f1}, p_{f2}[= [0, 4[: \text{ seule l'entreprise 1 produit} \end{cases}$$

3. L'équilibre de court terme est défini par $D(p) = S(p)$ ie par $1200 - 150p = 50p - 100$, ie par $p^* = 6,5$ impliquant une production globale par les deux entreprises égale à $Y^* = 225$.

Au prix $p^* = 6,5$ chaque entreprise de type 1 produit une quantité définie par la fonction d'offre de l'entreprise 1, ie $y_1^* = \frac{p^*}{2} = 3,25$ et chaque entreprise de type 2 produit une quantité définie par la fonction d'offre de l'entreprise 2, ie $y_2^* = \frac{p^*}{2} - 2 = 1,25$. Rq: on a bien une offre globale $S(p) = 50 \times 3,25 + 50 \times 1,25 = 225$.

Ainsi le profit de chaque type d'entreprise vaut:

Pour l'entreprise 1 : $\pi_1(3) = 6,5 \times 3,25 - (3,25^2 + 16) = -5,4375 < 0$

Pour l'entreprise 2 : $\pi_2(1) = 6,5 \times 1,25 - (1,25^2 + 4 \times 1,25 + 9) = -7,4375 < 0$

Chaque entreprise fait des pertes: logique car le prix de marché $p^* = 6,5$ est inférieur au seuil de rentabilité de chaque entreprise. Toutefois $p^* = 6,5$ est supérieur aux seuils de fermeture (de l'entreprise 1 comme de l'entreprise 2) donc chaque entreprise préfère produire plutôt que de mettre la clé sous la porte (chaque entreprise ferait davantage de pertes en ne produisant pas car elle devrait s'acquitter de ses coûts fixes; l'entreprise 1 ferait des pertes de 16 et l'entreprise 2 des pertes de 9).

4. A la suite d'une crise sanitaire la demande globale sur le marché devient $D(p) = 525 - 150p$ et les entreprises de type 1 assurent toute la production (les entreprises de type 2 sortent du marché).

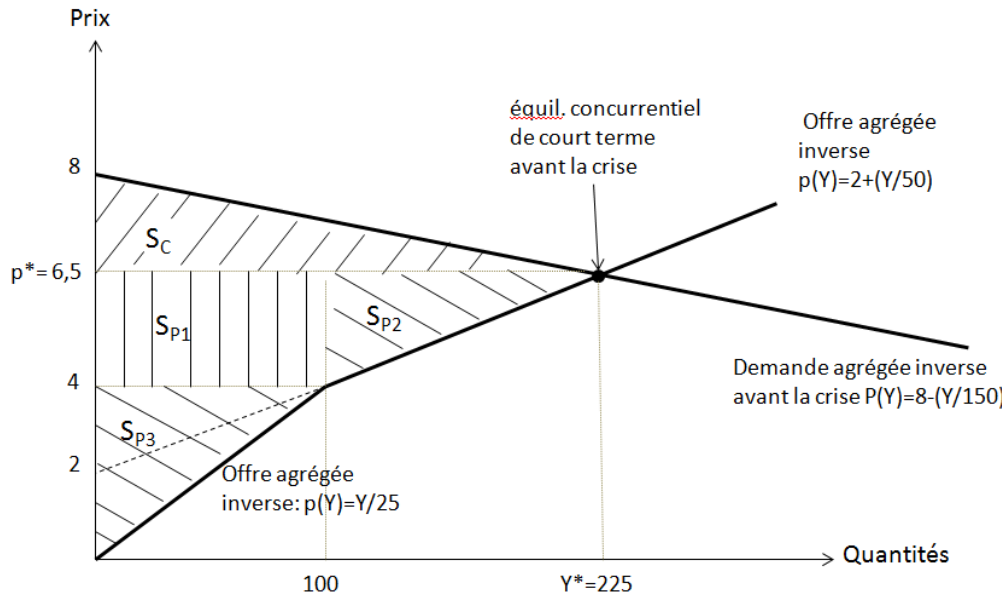
En effet, le prix d'équilibre est situé dans l'intervalle $p \in [p_{f1}, p_{f2}[= [0, 4[$ là où seule l'entreprise 1 produit. Etant donné la fonction d'offre des entreprises de type 1 $S(p) = 25p$ l'égalisation de la demande et l'offre à l'équilibre conduit à $p^* = 3$ et $Y^* = 75$. Chacune des 50 entreprises de type 1 produit une quantité égale à 3/2 et réalise un profit égal à : $\pi_1(3/2) = 3 \times 3/2 - ((3/2)^2 + 16) = -55/4 = -13,75 < 0$.

Rq: Le prix d'équilibre est forcément inférieur à 4 le seuil de fermeture de l'entreprise 1 car égaliser $D(p) = S(p)$ dans l'intervalle de prix $p \geq 4$ conduirait à $p^* = 3,125$ d'où une contradiction.

5. Comparaison des surplus avant et après le choc sur la demande:

Avant: Fonction de demande inverse: $p(Y) = 8 - Y/150$

Equilibre en $Y^* = 225$ et $p^* = 6,5$



Surplus des consommateurs $= 1,5 \times 225/2 = 168,75$

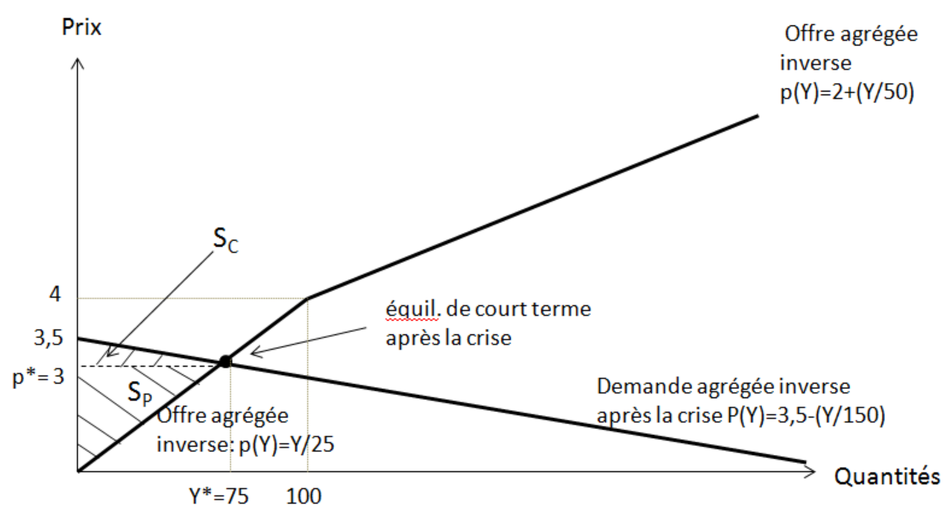
Surplus des producteurs $= S_{P1}+S_{P2}+S_{P3} = 2,5\times100+2,5\times125/2+4\times100/2 = 250+156,25+200 = 606,25$

D'où un surplus collectif avant la crise $= 775$

Rq : on vérifie que $Surplus_{prod} = \Sigma\Pi_i+\Sigma CF = 50\times(-5,4375)+50\times(-7,4375)+50\times16+50\times9 = 606,25.$

Après la crise : nouvelle fonction de demande inverse $p(Y) = 3,5 - Y/150$

Equilibre en $Y^* = 75$ et $p^* = 3$:



Surplus des consommateurs $= 0,5 \times 75/2 = 18,75 < 168,75$

Surplus des producteurs $= 3 \times 75/2 = 112,5 < 606,25$

D'où un surplus collectif après la crise $= 131,25 < 775$.

Rq : là aussi, on vérifie que $Surplus_{prod} = \Sigma\Pi_i + \Sigma CF = 50 \times (-13,75) + 50 \times 16 = 112,5$.

La quantité échangée à l'équilibre a diminué sous l'effet de ce choc sur la demande, le prix du bien a diminué et les surplus de tous ont diminué (impliquant une réduction du surplus collectif).

Exercice 2:

1. Les quantités individuelles demandées doivent être positives ou nulles, nous préciserons donc que

$$\begin{aligned} Y_1(p) &\geq 0 \text{ implique } p \leq 10 \\ et\ Y_2(p) &\geq 0 \text{ implique } p \leq 1 \end{aligned}$$

signifiant que la clientèle de type 1 ne "consommera" du sport en salle que si le prix unitaire est inférieur à 10, tandis que la clientèle de type 2 ne "consommera" du sport en salle que si le prix unitaire est inférieur à 1.

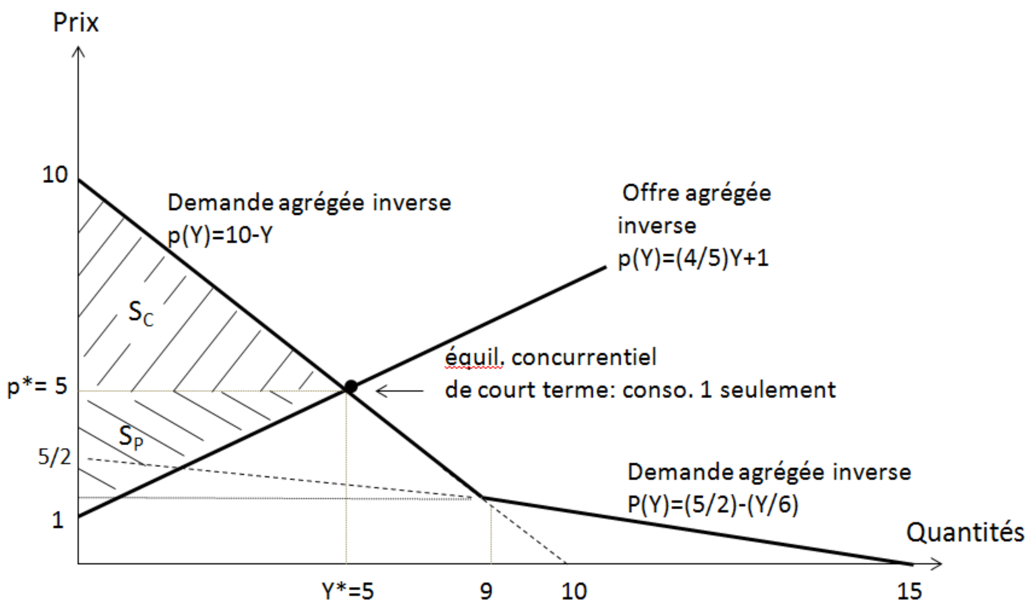
Ce qui implique que la fonction de demande agrégée $Y(p)$ sera coudée, avec 3 parties:

$$\begin{aligned} Y(p) &= 0 \text{ si } p > 10 : \text{ la pratique du sport en salle est trop onéreuse pour les deux segments de clientèle} \\ Y(p) &= Y_1(p) = 10 - p \text{ pour tout } p \in [1, 10] : \text{ seule la clientèle de type 1 pratiquera} \\ \text{et } Y(p) &= Y_1(p) + Y_2(p) = 10 - p + 5 - 5p = 15 - 6p \text{ pour tout } p \leq 1 : \text{ les deux segments de clientèle} \\ &\quad \text{pratiqueront le sport en salle, le prix unitaire étant assez bas;} \end{aligned}$$

ou en termes de demande inverse:

$$\begin{aligned} p(Y) &= 10 - Y \text{ pour tout } p \in]1, 10] : \text{ uniquement consommateurs 1} \\ p(Y) &= \frac{5}{2} - \frac{1}{6}Y \text{ pour tout } p \in [0, 1] : \text{ consommateurs 1 et 2} \end{aligned}$$

2. Pour la fonction d'offre agrégée de l'ensemble des entreprises du secteur: $Y(p) = \frac{5}{4}p - \frac{5}{4}$ (ou fonction d'offre inverse : $p(Y) = \frac{4}{5}Y + 1$), l'équilibre concurrentiel s'instaure dans la portion $p \in]1, 10]$ (ie pour la demande inverse $p(Y) = 10 - Y$) en $p^* = 5$ et $Y^* = 5$.



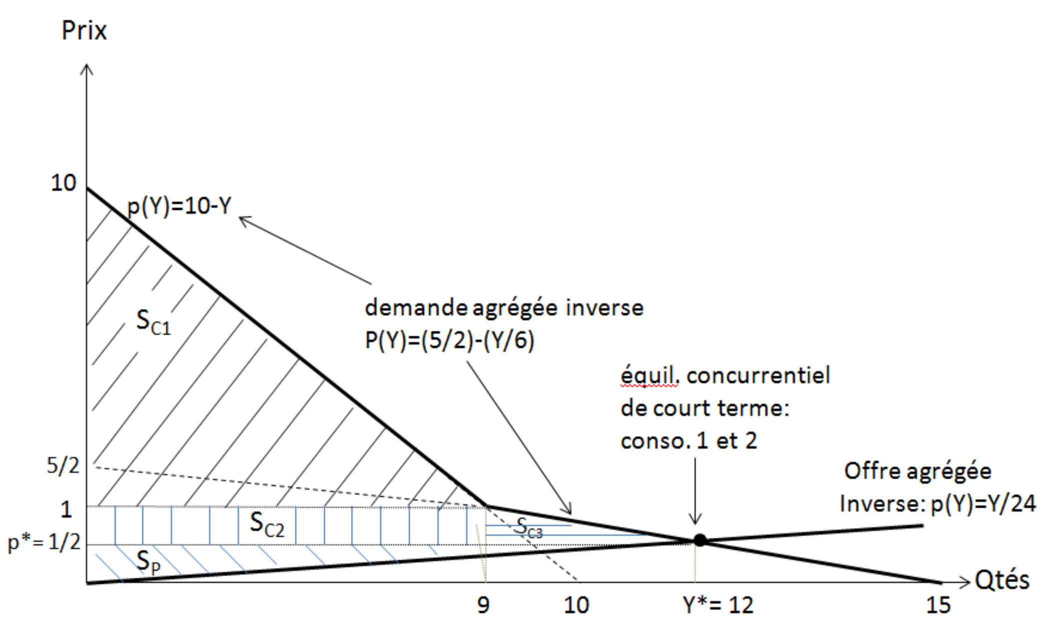
Surplus des consommateurs $= 25/2$

Surplus des producteurs $= 10$

Surplus collectif $= 45/2 = 22,5$

3. Pour la fonction d'offre agrégée de l'ensemble des entreprises du secteur: $Y(p) = 24p$ (ou fonction d'offre inverse: $p(Y) = Y/24$).

L'équilibre concurrentiel s'instaure en $Y^* = 12$ et $p^* = 1/2$:



Surplus des consommateurs $= S_{C1} + S_{C2} + S_{C3} = 81/2 + 9/2 + 3/4 = 183/4 = 45,75 > 25/2$

Surplus des producteurs $= 3 < 10$
Surplus collectif $= 48,75 > 22,5$
Le surplus des consommateurs a augmenté, celui des producteurs a diminué et le surplus collectif a augmenté.

Rq: Le prix de l'heure est ici plus faible, les salles de sport peuvent toucher les deux segments de clientèle et vendre plus d'heures de sport in fine. Les salles font-elles individuellement plus ou moins de profits ? impossible de répondre de façon catégorique à cette question, car nous ne connaissons pas les fonctions de coût sous-jacentes aux deux fonctions d'offre agrégées considérées ici; certes, le surplus des producteurs a baissé et on sait qu'il existe une relation étroite entre profits et surplus du producteur ($S_{Pj} = \Pi_j + CF_j$ avec CF_j les coûts fixes du producteur j), mais il faut se garder de conclure hâtivement que chaque salle de sport fait moins de profit sous la seconde fonction d'offre car il se peut que le nombre de salles exerçant sous la 1ère fonction et sous la seconde fonction soit différent (ou que les coûts fixes sous la 1ère fonction soient différents des coûts fixes sous la seconde fonction).