

Fiche n°7 : Equilibre général dans une économie avec production

Exercice 15:

Soit une économie composée d'un ménage dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $U(Y, l) = Y.l$ où Y est la quantité de bien de consommation et l la quantité de loisir. On note L la quantité de travail, sachant que le ménage dispose de 10 unités de temps total. L'économie se compose également d'une entreprise produisant le bien en utilisant du travail selon la technologie $Y = L^{1/2}$. On note w le salaire horaire et p le prix unitaire du bien de consommation.

1. En sachant que le bénéfice de l'entreprise, noté π , est versé au ménage, déterminez la demande de bien et l'offre de travail du ménage. Fournissez une représentation graphique.

2. Déterminez le bénéfice maximum de l'entreprise, son offre de bien et sa demande de travail.

Fournissez une représentation graphique.

3. Déterminez les demandes nettes de bien et de travail, notées respectivement $z_Y(w, p)$ et $z_L(w, p)$.

Vérifient-elles la loi de Walras ?

4. Écrivez le système d'équations caractérisant l'équilibre général et déterminez les prix, production, emploi, bénéfices à l'équilibre. Fournissez une représentation synthétique de l'équilibre en utilisant les graphiques des questions 1 et 2.

5. Comparez le $TMS_{Y \rightarrow l}$ et la productivité marginale du travail à l'équilibre. Fournissez une représentation graphique.

6. On suppose maintenant que la fonction de production de l'entreprise est donnée par $Y = \alpha L$ avec $\alpha > 0$. Déterminez l'équilibre général et commentez.

Corrigé:**Exercice 15 :**

1. On est dans une économie de production avec une entreprise et un ménage (ou consommateur) qui reçoit le bénéfice (ou profit de l'entreprise). En d'autres termes, le ménage est propriétaire de l'entreprise, on a donc un seul agent dans cette économie.

Le ménage maximise son utilité qui dépend positivement des consommations de bien et de loisir, sous sa contrainte budgétaire qui peut s'écrire:

$$\underbrace{pY}_{\text{dép. conso}} \leq \underbrace{wL + \pi}_{\text{rev. global}}$$

signifiant que les dépenses en bien de consommation ne doivent pas dépasser le revenu global, qui est constitué du salaire wL (salaire horaire $\times$ nb d'heures travaillées) et du bénéfice de l'entreprise π .

Etant donné que l'on a la relation $l + L = 10$ entre le travail et le loisir (10 étant le temps total à répartir entre les activités de loisir et le travail), on peut également écrire cette contrainte budgétaire en fonction de la variable l :

$$\begin{aligned} \underbrace{pY}_{\text{dép. conso}} &\leq \underbrace{w(10 - l) + \pi}_{\text{rev. global}} \\ \Leftrightarrow pY + wl &\leq 10w + \pi \end{aligned}$$

Le programme du ménage peut ainsi s'écrire (en fonction des seules variables Y et l) :

$$\begin{aligned} \underset{Y, l}{\text{Max}} U(Y, l) &= Y.l \\ \text{s.c. } \underbrace{pY}_{\text{dép. conso}} + \underbrace{wl}_{\text{dép. loisir}} &\leq 10w + \pi \end{aligned}$$

Le Lagrangien de ce programme s'écrit:

$$L(Y, l; \lambda) = Y.l + \lambda(10w + \pi - pY - wl)$$

avec $\lambda \geq 0$ le multiplicateur de Lagrange de la contrainte budgétaire.

Les CPO sont ainsi:

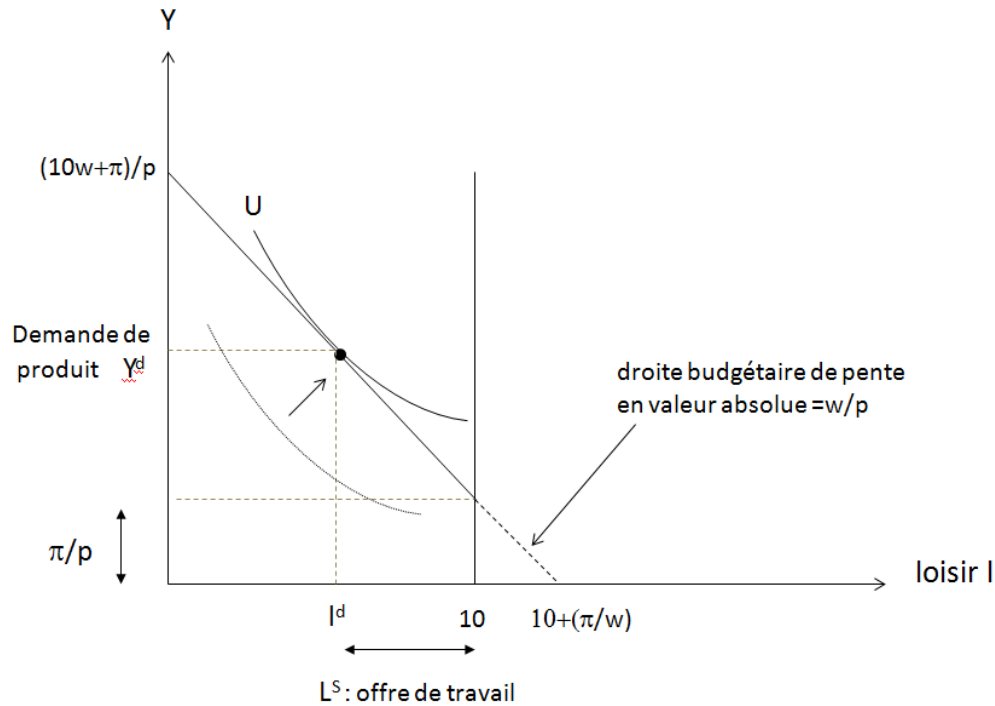
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Y} &= l - \lambda p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l} &= Y - \lambda w = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Rq: la contr. budgétaire est saturée ($\lambda > 0$) car si ce n'était pas le cas, on aurait $\lambda = 0$, or $\lambda = 0$ ne permet pas de vérifier les deux premières CPO. Il faut donc $\lambda > 0$ et ainsi $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ (signifiant $10w + \pi - pY - wl = 0$).

Le rapport des deux premières CPO conduit alors à $TMS_{l \rightarrow Y} = \frac{\partial U / \partial Y}{\partial U / \partial l} = \frac{p}{w}$ ou encore à $TMS_{Y \rightarrow l} = \frac{\partial U / \partial l}{\partial U / \partial Y} = \frac{w}{p}$ c'est-à-dire à $\frac{Y}{l} = \frac{w}{p}$, ce qui après substitutions dans la contrainte budgétaire conduit à :

$$\begin{aligned} Y^d &= \frac{10w + \pi}{2p} : \text{ demande de bien de consommation} \\ l^d &= 5 + \frac{\pi}{2w} : \text{ demande de loisir} \\ L^s &= 5 - \frac{\pi}{2w} : \text{ offre de travail du ménage.} \end{aligned}$$

Graphiquement, la droite budgétaire a pour équation $Y = \frac{10w+\pi}{p} - \frac{w}{p}l$. Le consommateur cherche à se placer sur la courbe d'iso-utilité la plus élevée (on se déplace sur une courbe d'indifférence de niveau d'utilité plus élevée lorsque Y et l augmentent, c'est-à-dire dans le sens de la flèche):



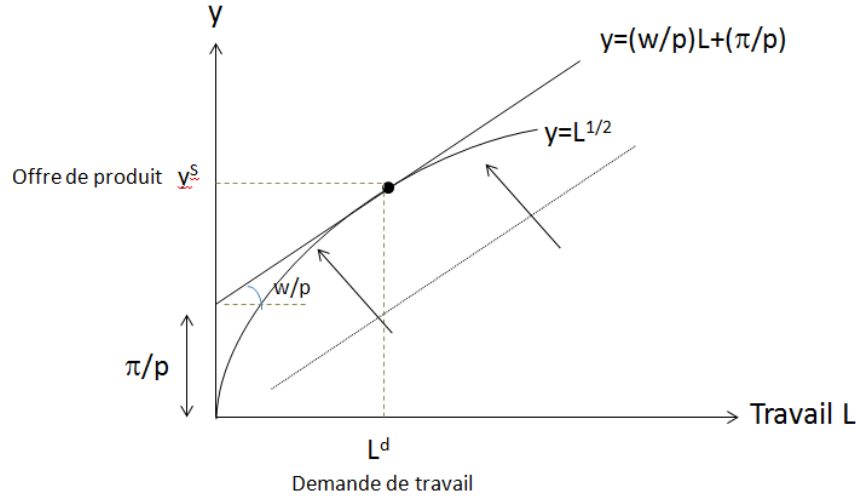
2. L'entreprise maximise son profit sous contrainte technologique, le programme de l'entreprise est :

$$\begin{aligned} \underset{Y,L}{Max} \pi(Y,L) &= pY - wL \\ s.c. Y &= \sqrt{L} \end{aligned}$$

ou encore

$$\underset{L}{Max} \pi(L) = p\sqrt{L} - wL$$

Graphiquement, l'entrepreneur recherche la droite d'iso-bénéfice, d'équation $Y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p}L$, la plus élevée possible compatible avec sa fonction de production. On se déplace sur une droite d'isoprofit plus élevée dans le sens des flèches sur le graphe (c'est-à-dire lorsque l'on augmente le niveau de production, ce qui augmente les recettes, et lorsque l'on diminue le travail, ce qui diminue les coûts de production).



La CPO ($\frac{d\pi}{dL} = 0$) équivaut à $\frac{p}{2}L^{-1/2} = w$, et la condition de second ordre est vérifiée car $\frac{d^2\pi}{dL^2} = -\frac{p}{4}L^{-3/2} < 0$ (le profit est bien concave dans L , donc là où la dérivée s'annule, on a bien un maximum).

La CPO permet de calculer la demande de travail :

$$L^d = \left(\frac{p}{2w}\right)^2$$

et, avec la fonction de production, on obtient l'offre de produit de l'entreprise :

$$Y^s = \frac{p}{2w}$$

Le bénéfice réel maximisé vaut alors $\frac{\pi}{p} = \frac{p}{2w} - \frac{p}{4w} = \frac{p}{4w}$.

3. En ne considérant plus le bénéfice comme une variable exogène dans le programme du ménage, mais comme une variable endogène optimisée par l'entreprise, on calcule les demandes excédentaires en bien de consommation et en travail:

$$\begin{aligned} z_Y &= Y^d - Y^s = \frac{10w + \pi}{2p} - \frac{p}{2w} = 5\frac{w}{p} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{p} - \frac{p}{2w} = 5\frac{w}{p} + \frac{1}{2}\frac{p}{4w} - \frac{p}{2w} = 5\frac{w}{p} - \frac{3}{8}\frac{p}{w} \\ z_L &= L^d - L^s = \left(\frac{p}{2w}\right)^2 - \left(5 - \frac{\pi}{2w}\right) = \left(\frac{p}{2w}\right)^2 - 5 + \frac{\left(\frac{p^2}{4w}\right)}{2w} = \frac{3p^2}{8w^2} - 5 \end{aligned}$$

On vérifie bien que la somme des valeurs des demandes excédentaires sur tous les marchés est nulle, même si les marchés ne sont pas équilibrés (*Loi de Walras*) :

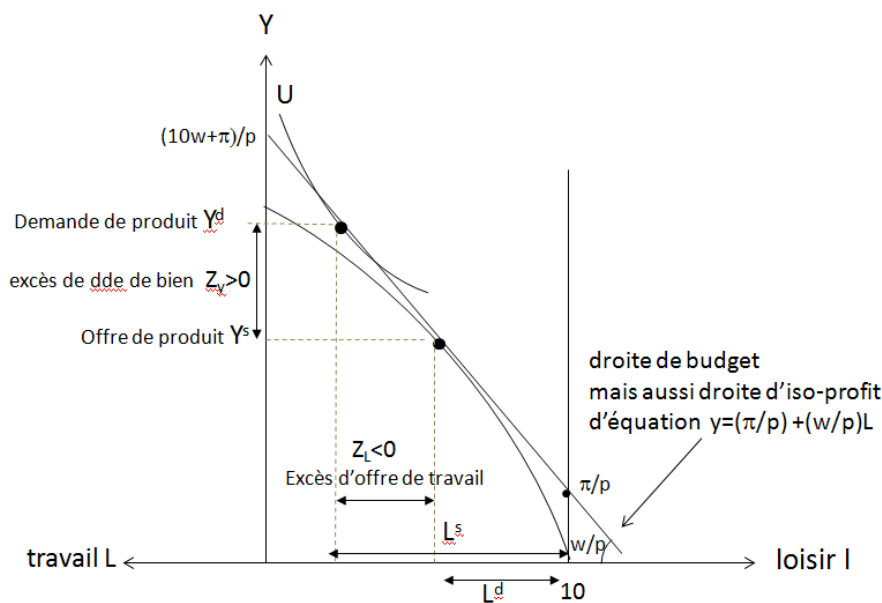
$$pz_Y + wz_L = 5w - \frac{3}{8}\frac{p^2}{w} + \frac{3p^2}{8w} - 5w = 0$$

4. En annulant les demandes excédentaires $z_Y = 0$ ou $z_L = 0$, on trouve le salaire réel d'équilibre $\left(\frac{w}{p}\right)^* = \sqrt{\frac{3}{40}} \simeq 0.274$. La production d'équilibre vaut $Y^* = \frac{p}{2w} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40}{3}} \simeq 1,825$ et l'emploi vaut $L^* = (Y^*)^2 = \frac{10}{3} \simeq 3,333$.

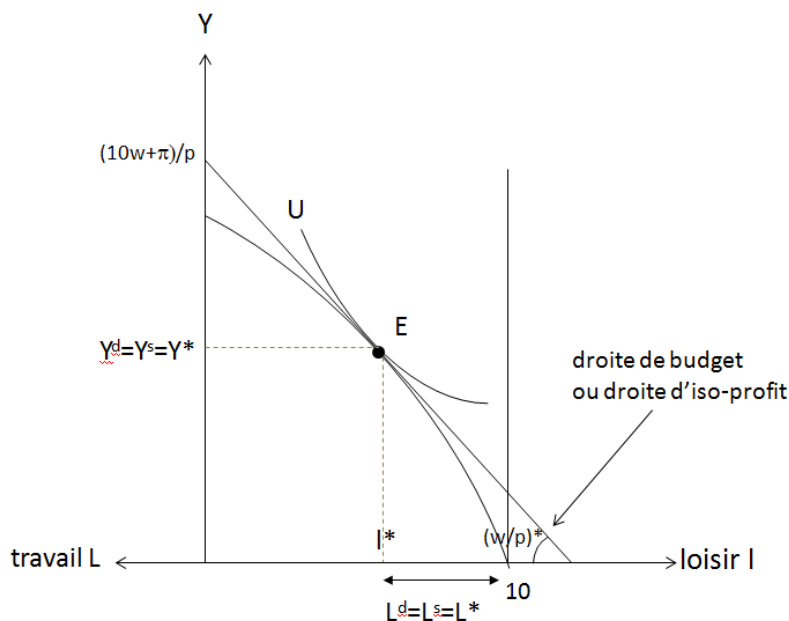
Rq : Le bénéfice n'est pas nul, à cause des rendements décroissants. A l'équilibre, sa valeur réelle est de $(\frac{\pi}{p})^* = Y^* - \sqrt{\frac{3}{40}}L^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40}{3}} - \sqrt{\frac{3}{40}}\frac{10}{3} = \frac{p}{4w} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{40}{3}} \simeq 0,913$.

5. Le $TMS_{Y \rightarrow l} = \frac{w}{p}$ et la productivité marginale du travail $\frac{dY}{dL} = f'(L) = \frac{1}{2}L^{-1/2} = \frac{1}{2Y} = \frac{1}{2} \frac{2w}{p}$ sont égaux à l'équilibre, car ils sont tous les deux égaux au salaire réel d'équilibre.

Graphiquement, on peut faire un « diagramme fishérien » (du nom d'Irving Fisher) dans lequel la fonction de production se lit de droite à gauche, à partir de l'abscisse, 10 représentant le temps total disponible dans la période. Cela permet de surposer les deux graphiques précédents :



Déséquilibre avec excès d'offre de travail et excès de demande de bien



Equilibre (annulation des excès d'offre de travail et de demande de bien)

Sur le 1er graphique sont représentés les excès de demande, non nuls dans une situation de déséquilibre : ici on a choisi une situation où l'on a un excès de demande de bien et un excès d'offre de travail. On peut aussi lire la loi de Walras car il est géométriquement manifeste que $z_Y + (w/p)z_L = 0$. L'équilibre général est en E sur le graphique de droite.

Les graphiques permettent d'illustrer la double égalité fondamentale $TM S_{Y \rightarrow l} = \frac{dY}{dL} = \frac{w}{p}$ et le partage de la valeur ajoutée en salaires et bénéfices. Ils montrent en outre quelque chose de plus : l'allocation d'équilibre général est aussi celle à laquelle serait parvenu un Robinson Crusoe isolé, sans entreprise ni marchés.

6. Question plus difficile.

Si $Y = \alpha L$, la productivité marginale du travail α est constante et égale à la productivité moyenne, les rendements sont constants et le bénéfice s'annule à l'équilibre. On a en effet :

$$\pi = pY - wL = (\alpha p - w)L$$

de sorte que le profit est une fonction linéaire du travail.

Ainsi, si $(\alpha p - w) > 0$, c'est-à-dire si $\alpha > \frac{w}{p}$, π est strictement croissant avec L et la demande de travail qui maximise le profit est infinie (plus L augmente et plus le profit de l'entreprise augmente), et l'offre de produit sera infinie aussi puisque Y et L sont liés par la relation $Y = \alpha L$.

Si au contraire, $(\alpha p - w) < 0$, c'est-à-dire si $\alpha < \frac{w}{p}$, π est strictement décroissant avec L et donc la demande de travail qui maximise le profit est nulle (plus L augmente et plus l'entreprise fait des pertes donc mieux vaut choisir $L = 0$). L'offre de produit sera nulle également.

Dans le cas particulier enfin où $\alpha = \frac{w}{p}$, le profit est nul quelle que soit la quantité L (et donc quelle que soit la qté produite Y). L'entreprise est donc indifférente à la qté de travail et à la qté produite (elle fera dans tous les cas un profit nul, à condition toutefois que L et Y soient reliés selon la relation $Y = \alpha L$).

Du côté du consommateur, la demande de produit et l'offre de travail restent celles de la question 1:

$$\begin{aligned} Y^d &= \frac{10w + \pi}{2p} : \text{demande de bien de consommation} \\ l^d &= 5 + \frac{\pi}{2w} : \text{demande de loisir} \\ L^s &= 5 - \frac{\pi}{2w} : \text{offre de travail du ménage.} \end{aligned}$$

Donc dans une situation où $\alpha > \frac{w}{p}$, étant donné que la demande de travail de l'entreprise et l'offre de produit de l'entreprise sont infinies, on aura nécessairement un excès de demande de travail et un excès d'offre de produit. Aucun rapport de prix (c'est-à-dire aucun salaire réel $\frac{w}{p}$) ne permettra jamais d'annuler les excès de demande.

Inversement, dans une situation où $\alpha < \frac{w}{p}$, étant donné que la demande de travail de l'entreprise et l'offre de produit de l'entreprise sont nulles, on aura nécessairement un excès d'offre de travail et un excès de demande de produit. Là non plus, aucun rapport de prix (c'est-à-dire aucun salaire réel $\frac{w}{p}$) ne permettra d'annuler les excès de demande.

La seule situation d'équilibre peut être obtenue lorsque $\frac{w}{p} = \alpha$. C'est en choisissant un rapport de prix $\frac{w}{p}$ qui est tout juste égal à α (α lui est exogène), que l'on annule les excès de demande : en effet, dans cette situation le profit de l'entreprise est nul et celle-ci est indifférente à la qté de travail utilisée. Pour $\frac{w}{p} = \alpha$, le

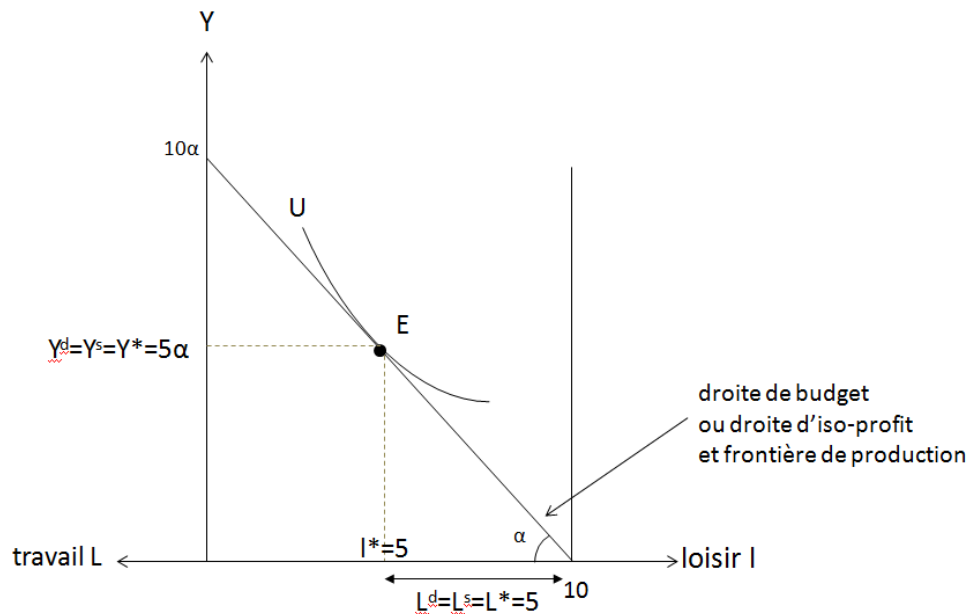
$TMS_{Y \rightarrow l} (= \frac{\partial U / \partial l}{\partial U / \partial Y})$ est donc égal à α , ce qui implique $\frac{Y}{l} = \alpha$. La pente de la droite de budget est donc égale à α à l'équilibre. La pente de la droite d'isoprofit de l'entreprise sera également égale à α .

Or ici à l'équilibre, on a nécessairement $\pi = 0$; il vient donc immédiatement à partir des fonctions de demande du consommateur:

$$\begin{aligned} Y^d &= \frac{10w}{2p} = 5 \frac{w}{p} : \text{demande de bien de consommation} \\ l^d &= 5 : \text{demande de loisir} \\ L^s &= 5 : \text{offre de travail du ménage.} \end{aligned}$$

et parce que le producteur est indifférent à Y offert et L demandée, on aura à l'équilibre:

$$l^* = L^* = 5 \text{ et avec le salaire réel } \left(\frac{w}{p}\right)^* = \alpha, \text{ on a } Y^* = 5\alpha.$$



Equilibre en cas de rendements constants

Tout se passe comme si Robinson échangeait avec la « nature » en maximisant son utilité sous la contrainte linéaire, le terme α apparaissant comme le « prix », en fait le taux de transformation du travail en bien.