

Jeux coopératifs

Introduction

Éléments de base dans les jeux non-coopératifs :

- Stratégies des individus
- Issue du jeu = profil de stratégies
- Préférences des individus sur les issues

Éléments de base dans les jeux coopératifs :

- Actions jointes des **coalitions** (groupes d'individus)
- **Grande coalition** = coalition formée par tous les joueurs
- Issue du jeu = coalitions formées (\rightarrow partition de l'ensemble des joueurs) et actions jointes prises par les coalitions
- Préférences des individus sur les issues (comme dans les jeux non-coopératifs)

Concept de solution dans les jeux coopératifs : à chaque jeu, assigner un ensemble d'issues

- ➔ stabilité (en général), comme dans les jeux non-coopératifs, mais vis-à-vis des groupes de joueurs

Contrairement aux jeux non-coopératifs, pas de détails sur la manière dont les groupes se forment ni sur la manière dont ils prennent leurs décisions

Négociation : Approche coopérative / axiomatique

- ↳ Étudier les jeux de négociation (marchandage / partage à deux joueurs) avec l'approche de la théorie des jeux coopératifs
- ☞ Pas de modélisation de la procédure de négociation
- ☞ Quelles issues ont des propriétés “raisonnables” ?
- ☞ Comment varie la solution avec les préférences et les opportunités des joueurs ?

- ↳ Définition de la solution de Nash, caractérisation axiomatique, et liens avec l'approche stratégique (offres alternées)
- X : ensemble des partages possibles / réalisables
- D : issue de désaccord
- $u_i : X \cup \{D\} \rightarrow \mathbb{R}$: fonction d'utilité du joueur i
- $\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) = (u_1(x), u_2(x)) : x \in X\}$: paires de paiements (utilités) possibles
- $d = (u_1(D), u_2(D))$: paiements (utilités) de désaccord

Définition. Un **problème de négociation** ou de **marchandise** est une paire (\mathcal{U}, d) , où \mathcal{U} est l'ensemble des paires de paiements possibles, $d = (d_1, d_2)$ est la paire de paiement de désaccord, telle que :

- (i) $d \in \mathcal{U}$
- (ii) Il existe $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t. q. $v_1 > d_1$ et $v_2 > d_2$
- (iii) L'ensemble \mathcal{U} est compact (fermé et borné) et convexe

Exemple. Économie d'échange. Point de désaccord \sim dotations initiales

Remarque. Le paiement de désaccord d n'est pas Pareto optimal d'après (ii)

Définition. Une **solution de négociation** est une fonction ψ qui associe à tout problème de négociation (\mathcal{U}, d) un élément unique $\psi(\mathcal{U}, d)$ de \mathcal{U}

Axiomes

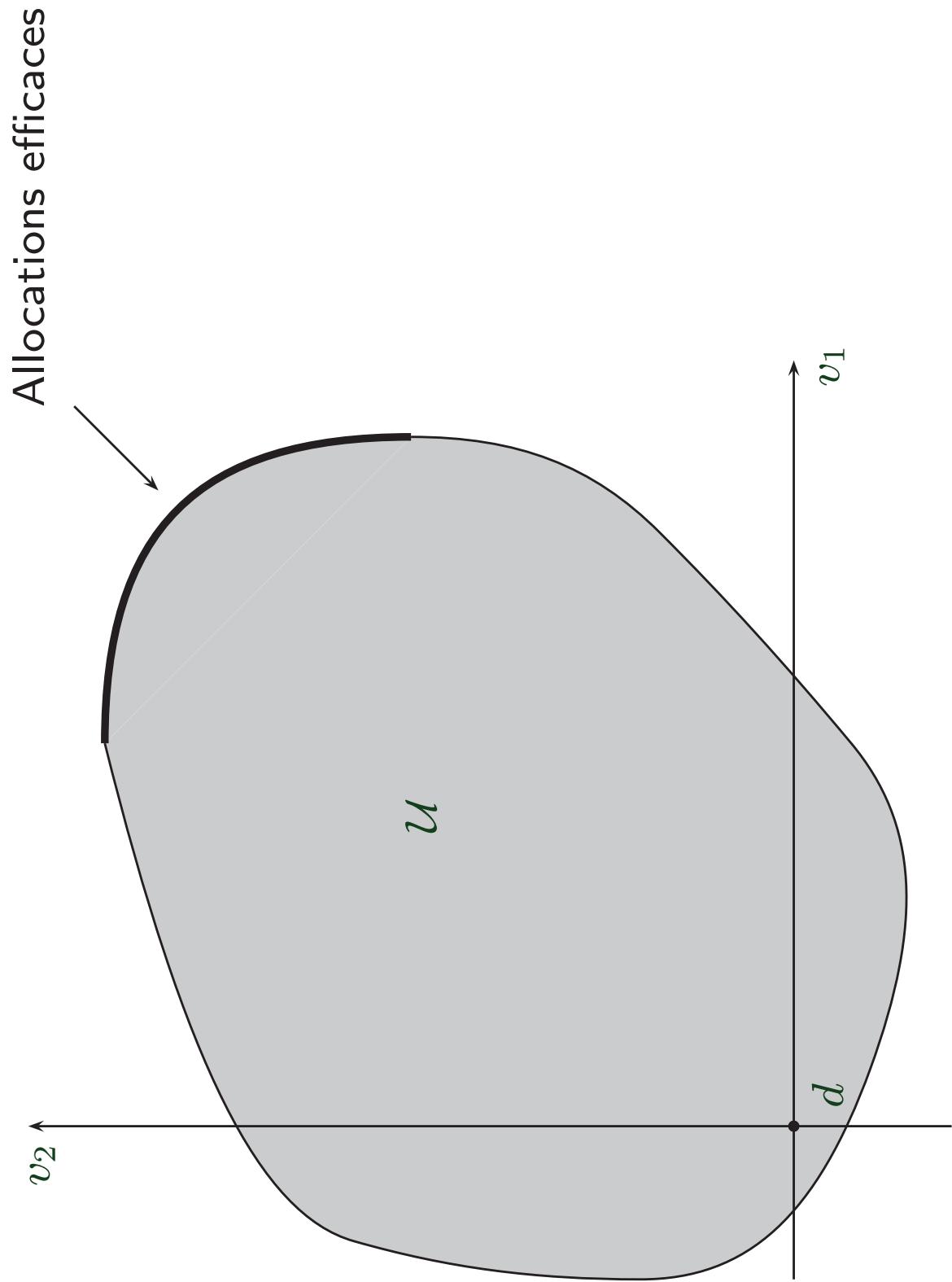
→ Propriétés souhaitables d'une solution de négociation

$$\psi(\mathcal{U}, d) = (\psi_1(\mathcal{U}, d), \psi_2(\mathcal{U}, d)) \in \mathcal{U}$$

Remarque. Axiome implicite : **existence** et **unicité** du partage $\psi(\mathcal{U}, d)$ pour tout (\mathcal{U}, d)

♦ **Pareto optimalité (PAR).** Pour tout problème de négociation (\mathcal{U}, d) , la solution de négociation $\psi(\mathcal{U}, d)$ n'est dominée par aucune paire (v_1, v_2) de \mathcal{U} :
 $\nexists (v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ t.q. $v_i \geq \psi_i(\mathcal{U}, d)$, $i = 1, 2$, avec une inégalité stricte au moins

→ Pas de possibilité de renégociation qui arrangerait les deux joueurs



- ♦ **Symétrie (SYM).** (“Équité”) Si le problème de négociation (\mathcal{U}, d) est symétrique, i.e., $(v_1, v_2) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in \mathcal{U}$ (la droite de 45° est un axe de symétrie pour \mathcal{U}) et $d_1 = d_2$, alors la solution de négociation donne le même paiement aux deux joueurs : $\psi_1(\mathcal{U}, d) = \psi_2(\mathcal{U}, d)$
- ↳ Ces deux axiomes déterminent immédiatement une solution unique pour les jeux symétriques

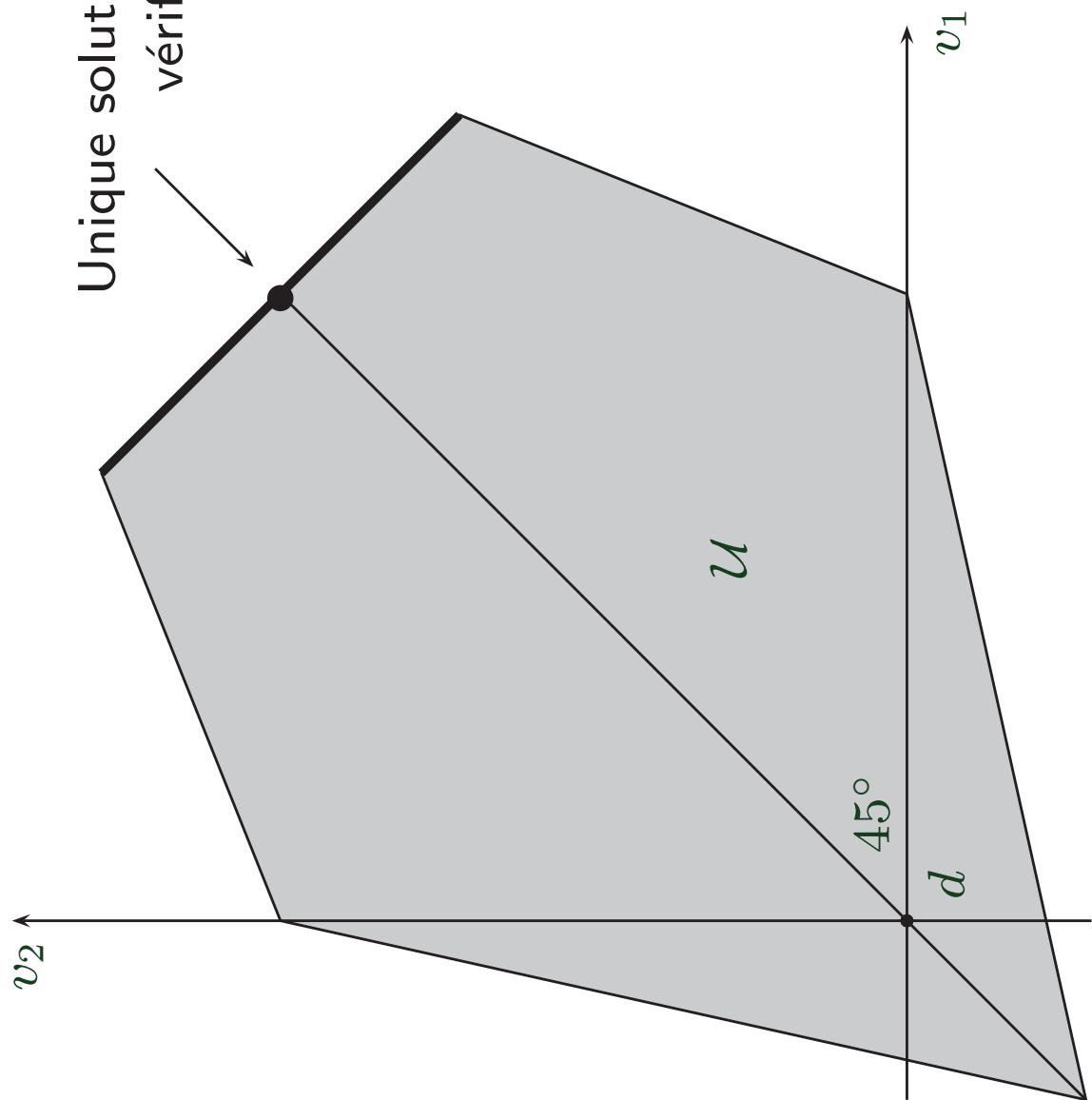


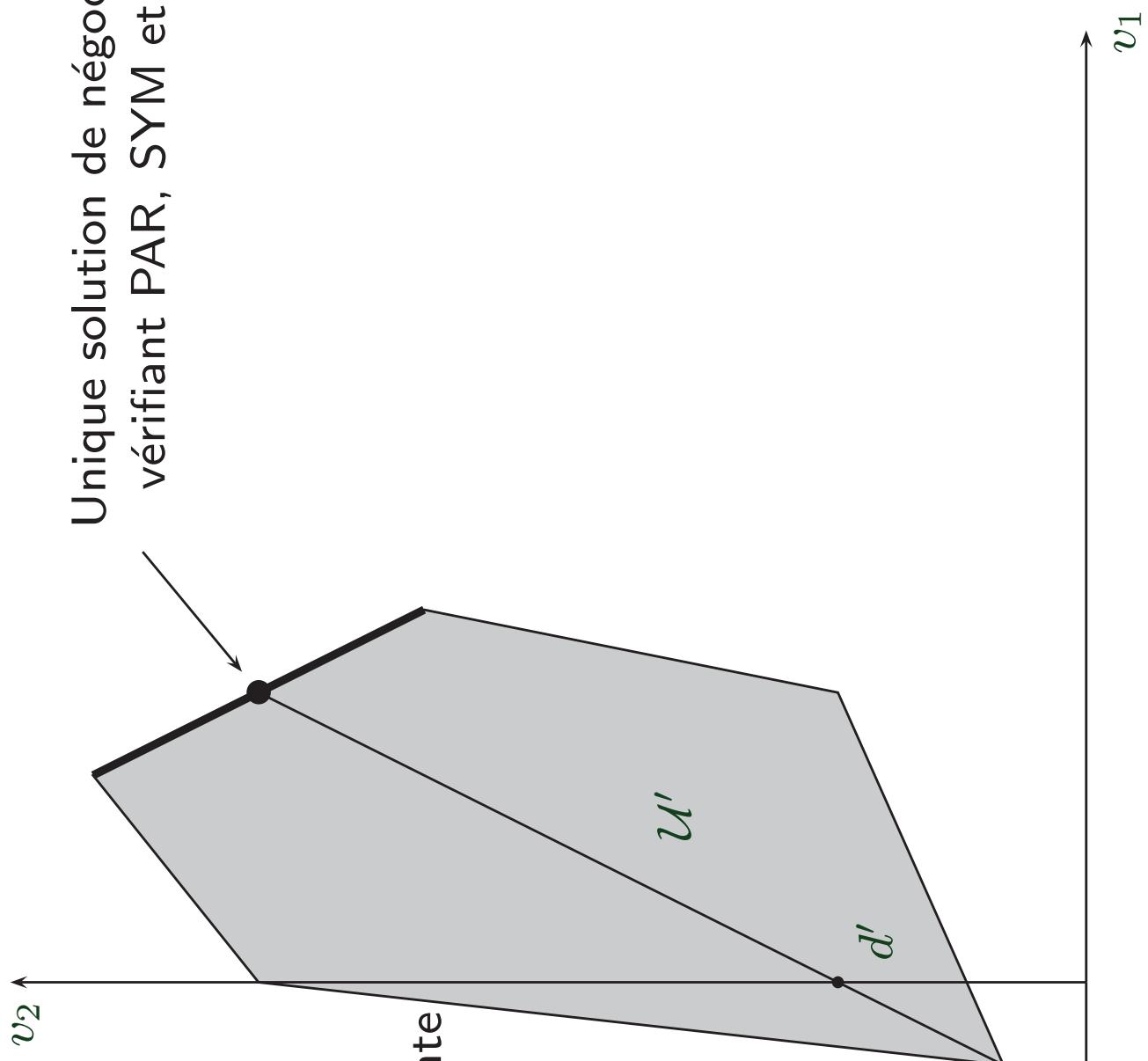
FIG. 1 –

- ♦ **Invariance par rapport aux représentations équivalentes des utilités (INV).** Si le problème de négociation (\mathcal{U}', d') est dérivé du problème de négociation (\mathcal{U}, d) par des transformations affines croissantes ($v'_i = \alpha_i v_i + \beta_i$ et $d'_i = \alpha_i d_i + \beta_i$, $i = 1, 2$, $\alpha_i > 0$), alors la solution au problème de négociation transformé pour i est la transformée de la solution du problème original :

$$\psi_i(\mathcal{U}', d') = \alpha_i \psi_i(\mathcal{U}, d) + \beta_i \quad (i = 1, 2)$$

- ↑ Cohérence avec le fait que l'utilité espérée est une représentation cardinale des préférences
- ↑ Sans perte de généralité, on peut toujours se ramener au cas où $d = (0, 0)$

⇒ Avec ces trois premiers axiomes une solution de négociation est définie de manière unique pour les problèmes de négociations obtenus par transformation linéaire des utilités à partir d'un problème de négociation symétrique



Transformation affine croissante
du problème de la figure 1

$$v'_1 = \frac{1}{2} v_1$$

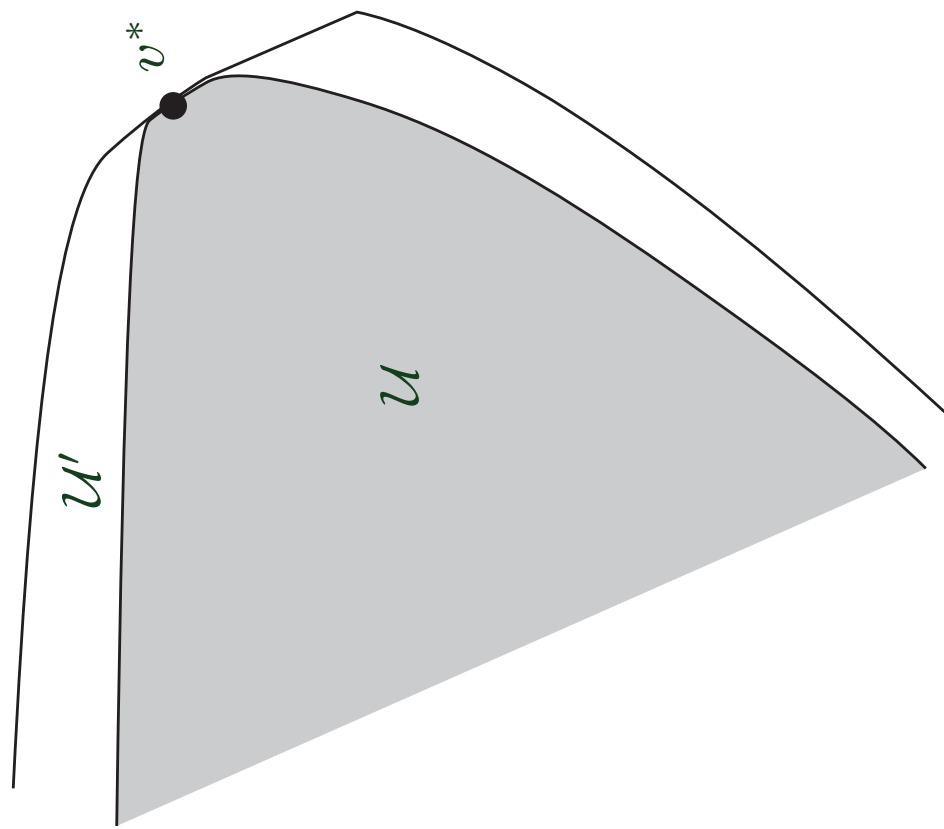
$$v'_2 = v_2 + 30$$

Mais tous les problèmes de négociation ne peuvent être obtenus à partir de problèmes symétriques par des transformations linéaires des paiements des joueurs

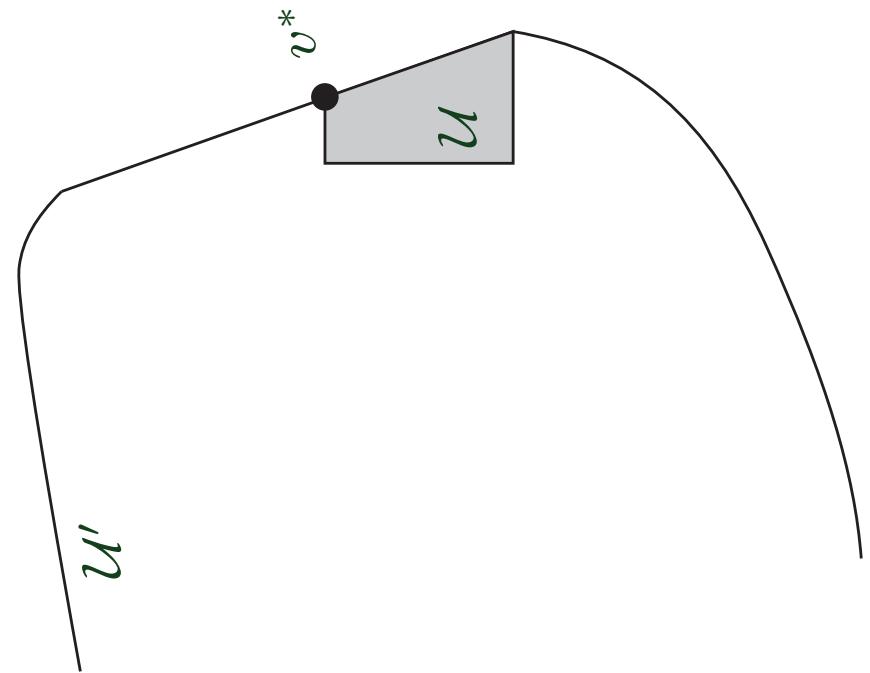
⇒ Un dernier axiome est nécessaire

- ♦ **Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes (IIA).** (invariance par rapport à la contraction) Si deux problèmes de négociation (\mathcal{U}, d) et (\mathcal{U}', d) avec le même point de désaccord sont tels que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ et $\psi(\mathcal{U}', d) \in \mathcal{U}$ alors
$$\psi(\mathcal{U}, d) = \psi(\mathcal{U}', d)$$

Remarque. Si la solution ψ s'obtient en maximisant une fonction sur l'ensemble des utilités possibles alors cette propriété est satisfaite



Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ et $\psi(\mathcal{U}', d) = v^* \in \mathcal{U}$ alors $\psi(\mathcal{U}, d) = v^*$



Proposition. (Théorème de Nash) Il existe une et une seule solution de négociation vérifiant les 4 axiomes précédents (PAR, SYM, INV et IIA). C'est la **solution de négociation de Nash**, qui assigne à tout problème de négociation (\mathcal{U}, d) la paire de paiements qui maximise le *produit de Nash* :

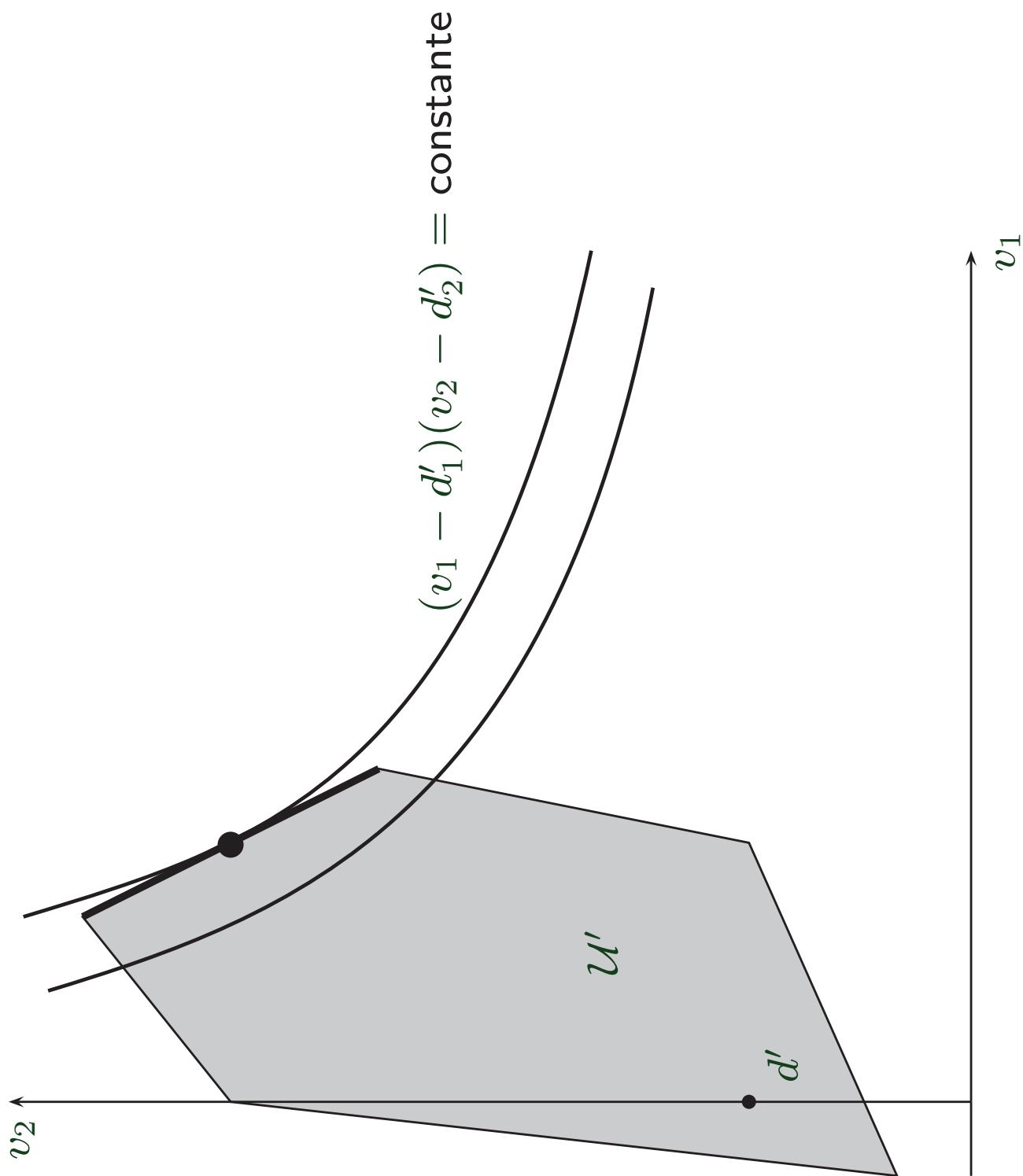
$$\max_v (v_1 - d_1)(v_2 - d_2) \quad s.c. \quad v \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad v \geq d$$

👉 Vérifier que la solution de Nash satisfait bien les 4 axiomes (\Rightarrow existence)

Pour toute valeur c , l'ensemble des paires de paiements (v_1, v_2) telles que

$$(v_1 - d_1)(v_2 - d_2) = c$$

est une hyperbole équilatère \Rightarrow la solution de Nash est la paire (v_1, v_2) appartenant à \mathcal{U} qui est sur la plus haute de ces hyperboles



Intuition pour la démonstration de l'unicité.

Soit $\psi^N(\mathcal{U}, d) = v^N$ la solution de Nash et $\psi^*(\mathcal{U}, d)$ une solution satisfaisant les 4 axiomes. On démontre que $\psi^N = \psi^*$

INV \Rightarrow on peut supposer sans perte de généralité $d = (0, 0)$ et $v^N = (1, 1)$
 (changement d'échelle $\rightarrow \frac{v_i - d_i}{v_i^N - d_i}$)

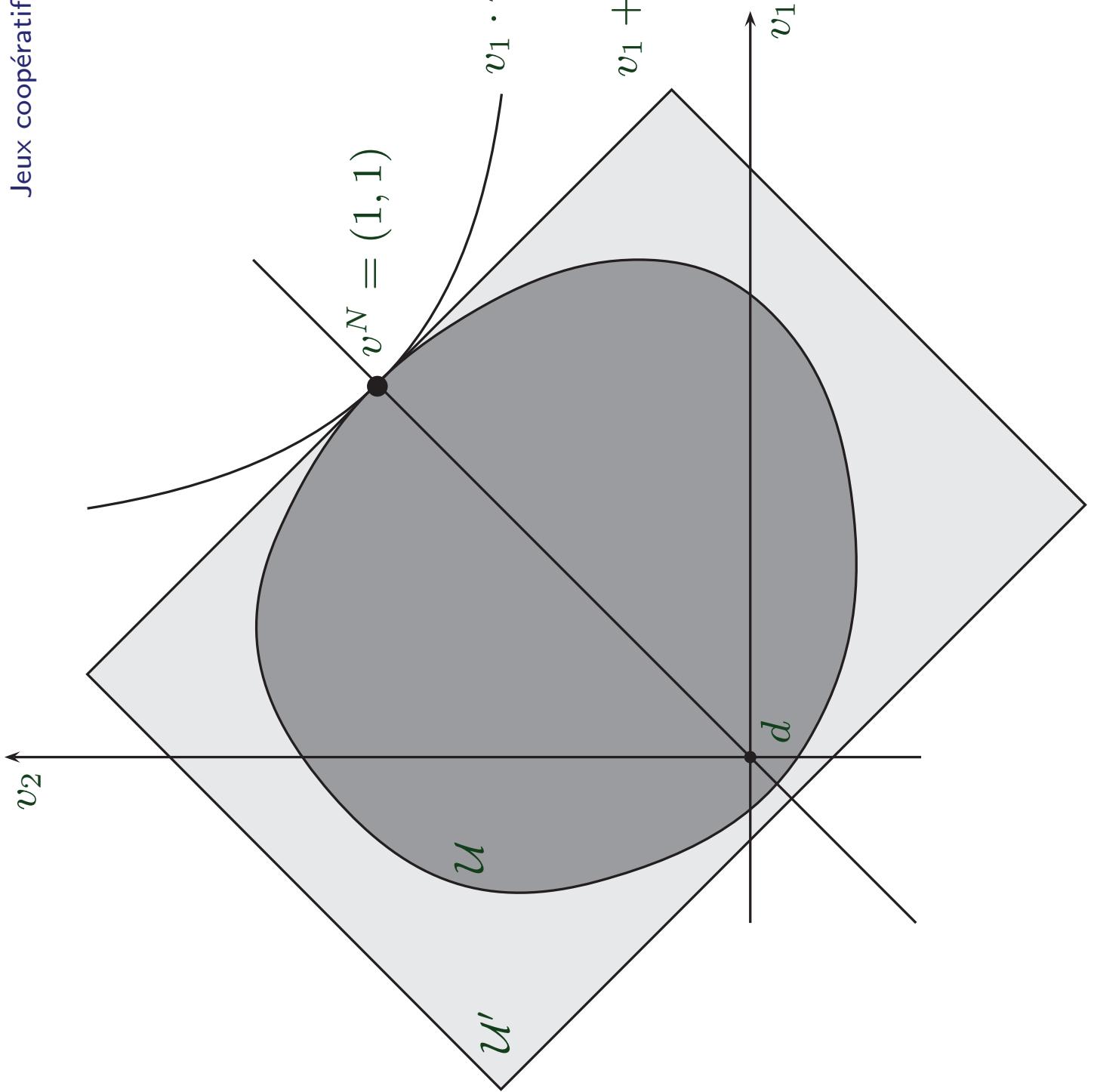
v^N est solution de $\max_{v \in \mathcal{U}} (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow v^N$ tangente à $v_1 \cdot v_2 = 1$. Équation de la tangente : $v_1 + v_2 = 2$

\mathcal{U} convexe $\Rightarrow \mathcal{U}$ est en dessous de cette tangente

\Rightarrow on peut inclure \mathcal{U} dans un grand rectangle symétrique \mathcal{U}' (voir figure)

PAR, **SYM** $\Rightarrow \psi^*(\mathcal{U}', d) = v^N$

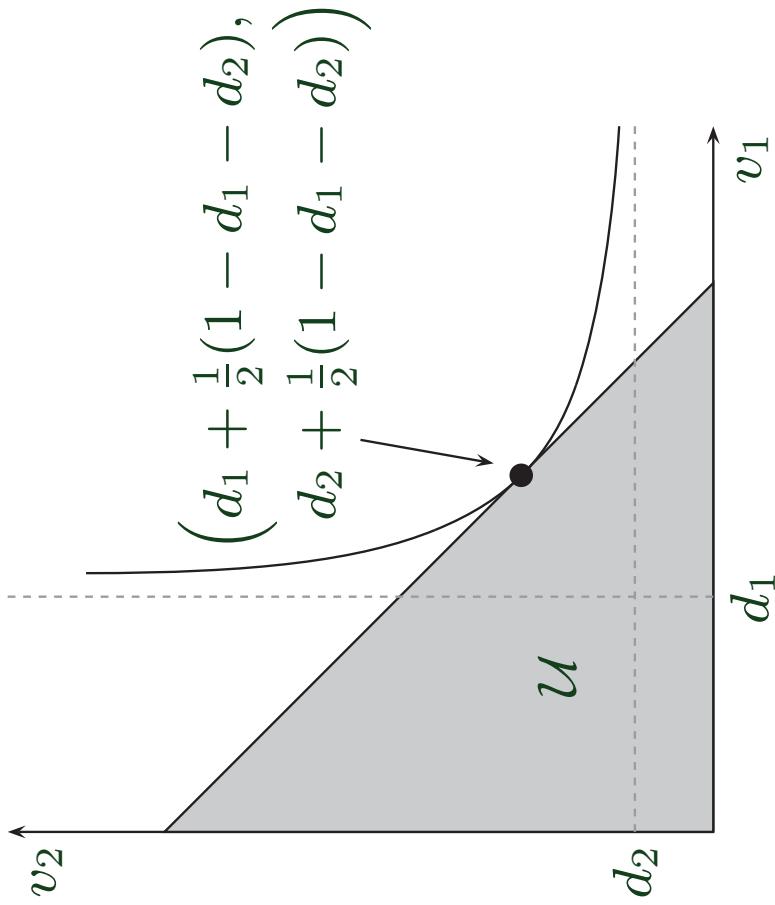
IIA $\Rightarrow \psi^*(\mathcal{U}, d) = \psi^*(\mathcal{U}', d) = v^N$ car $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$



Lien avec l'approche stratégique

("Programme de Nash")

Considérons le problème de négociation (\mathcal{U}, d) où $\mathcal{U} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+^2 : v_1 + v_2 \leq 1\}$



- ☞ Solution de Nash identique à la solution de négociation séquentielle (ENPSJ) avec risque de rupture exogène $\alpha \rightarrow 0$ (sans actualisation), où $d = b$ est la paire de paiements des joueurs lorsque le jeu est interrompu (Binmore et al., 1986)

Généralisation à n joueurs ?

- 1ère manière évidente : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, point de désaccord $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{U}$

Interprétation : soit tout le monde est d'accord avec la solution $v \in \mathcal{U}$, soit désaccord d

$$\Rightarrow \max_{v \in \mathcal{U}} \prod_{i=1}^n (v_i - d_i) \quad \text{s.c.} \quad v \geq d$$

... mais pas de prise en compte de la formation de **groupes** de joueurs dans la formation de la solution et dans leurs influences sur la solution par la **pression** (**menace**)

- 2ème manière : prise en compte de la formation des groupes de joueurs, alliances ou **coalitions**, au moins comme moyen de pression (rôle potentiel des coalitions)

Coalitions et fonction caractéristique

Jeu coalitionnel : modèle de décisions interactives axé sur le comportement des groupes de joueurs, ou **coalitions**

Une coalition est un sous ensemble $S \subseteq N \equiv \{1, \dots, n\}$, $S \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs ($2^n - 1$ coalitions sont possibles)

$S = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton)

$S = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition)

Hypothèse ici : utilité transférable ("TU games") : on peut additionner les utilités des joueurs d'une coalition et les redistribuer à ses membres (il existe une "monnaie" commune à tous avec laquelle on peut effectuer des transferts)

Définition. Un jeu coalitionnel à utilité transférable, ou jeu sous forme caractéristique, est une paire (N, v) où

- N est un ensemble des joueurs
- v est une fonction caractéristique qui associe une valeur $v(S) \in \mathbb{R}$ à chaque coalition S de N

Pour chaque coalition S , la valeur $v(S)$ est le paiement total que peuvent se partager les joueurs appartenant à la coalition de S (indépendamment du comportement des joueurs qui ne font pas partie de S)

↑ $v(S) =$ idée a priori du pouvoir du groupe S

Définition. Un jeu est

- **symétrique** si la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille : il existe une fonction f telle que $v(S) = f(|S|)$ pour tout $S \subseteq N$
- **monotone** si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Hypothèse : Superadditivité : $S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Remarque.

- Superadditivité $\Rightarrow v(N) \geq \sum_k v(S_k)$ pour toute partition $\{S_k\}_k$ de N
- Si $v(S) \geq 0 \forall S$ alors superadditivité \Rightarrow monotonie

Jeux simples

Un jeu coalitionnel (N, v) est **simple** si $v(S) = 1$ (**coalition gagnante**) ou $v(S) = 0$ (**coalition perdante**), et $v(N) = 1$

Remarque. D'après la superadditivité, si $v(S) = 1$ alors $v(N \setminus S) = 0$ et $v(T) = 1$ pour $S \subseteq T$ (mais pas \Leftarrow)

Un joueur j a un droit de **veto** s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes $(v(S) = 1 \Rightarrow j \in S)$

Un joueur j est un **dictateur** si une coalition est gagnantessi il en fait partie $(v(S) = 1 \Leftrightarrow j \in S)$

Exemples. (3 joueurs)

– **Majorité simple.** Une coalition est gagnantessi elle comprend au moins 2 membres

$$\updownarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

– **Unanimité.** Une coalition est gagnantessi elle comprend tous les membres

$$\updownarrow \begin{cases} v(1, 2, 3) = 1 \\ v(S) = 0 \text{ pour les autres coalitions} \end{cases}$$

– **Droit de veto.** Une coalition est gagnantessi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

$$\updownarrow \begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 3) = 0 \\ v(1, 2) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

– **Dictature**. Une coalition est gagnantessi elle comprend le joueur 2

$$\updownarrow \begin{cases} v(1) = v(3) = v(1, 3) = 0 \\ v(2) = v(1, 2) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

Problème : comment répartir $v(N)$ entre les n joueurs ?

Le cœur

Concept de solution pour les jeux coalitionnels qui exige qu'aucune coalition ne peut dévier en améliorant le paiement de tous ses membres

Pour un profil de paiements (répartition) $(x_i)_{i \in N}$ et une coalition S on note $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ la somme des paiements des membres de S

Définition. Un profil de paiements $(x_i)_{i \in N}$ est S -réalisable si $x(S) = v(S)$. Il est réalisable s'il est N -réalisable

Définition. Le **coeur** d'un jeu coalitionnel (N, v) est l'ensemble des répartitions $(x_i)_{i \in N}$ réalisables telles que

$$x(S) \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N$$

ou, de manière équivalente, telles qu'il n'existe pas de coalition S et de répartition S -réalisable $(y_i)_{i \in N}$ où $y_i > x_i$ pour tout $i \in S$

☞ La répartition $(x_i)_{i \in N}$ ne peut pas être **bloquée** par une coalition S ("stabilité sociale")

Remarque. Rationalité collective ($x(N) = v(N)$) et rationalité individuelle ($x_i \geq v(i) \quad \forall i$) vérifiées

Exemples

Jeux simples.

Majorité.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{impossible (coeur} = \emptyset)$$

Unanimité.

$$\text{Coeur} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i\}$$

Droit de veto.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Cœur} = \{(0, 1, 0)\}$$

Dictature.

$$\text{Cœur} = \{(0, 1, 0)\}$$

↳ Pas de différence entre veto et dictature. (Il y a une différence avec la valeur de Shapley)

Proposition. *Dans un jeu simple,*

- (i) *si aucun joueur n'a un droit de veto alors le cœur est vide*
- (ii) *si au moins un joueur a un droit de veto, alors le cœur est non vide : c'est l'ensemble de toutes les répartitions réalisables (et positives) qui donnent un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto*

Preuve.

- (i) Aucun joueur n'a un droit de veto $\Leftrightarrow \forall i \in N, \exists S \text{ t.q. } v(S) = 1 \text{ et } i \notin S$, donc $v(N \setminus i) = 1$ pour tout i (monotonie)
- $x \in \text{Cœur} \Rightarrow x(N) = 1$ et $x(N \setminus i) \geq v(N \setminus i) = 1$ pour tout $i \Rightarrow$ impossible
- (ii) Soit $V \neq \emptyset$ l'ensemble des joueurs ayant un droit de veto et x une répartition réalisable et positive qui donne un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto :

$$\left. \begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \forall i \in V \\ x_i = 0 \quad \forall i \notin V \\ \sum_{i \in N} x_i = 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

- Si S est gagnante alors $V \subseteq S$, donc $x(S) = 1 = v(S)$
- Si S est perdante alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

donc $x \in \text{coeur}$

Pour montrer que seules les répartitions vérifiant (1) appartiennent au cœur, soit x une répartition du cœur qui ne vérifie pas (1), donc t.q. $x_j > 0$ pour un $j \notin V$
 $j \notin V \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists S, j \notin S$, t.q. $v(S) = 1 > x(S)$, donc S bloque x , i.e. $x \notin \text{coeur}$ \square

Conditions générales, nécessaires et suffisantes, de non vacuité de cœur : Bondareva (1963) et Shapley (1967) (voir Osborne et Rubinstein, 1994, pp. 262–263)

Une économie de production

Firme (propriétaire terrien) : joueur 0

K travailleurs : joueurs 1, ..., K

k travailleurs peuvent produire avec le propriétaire $f(k) \geq 0$, où $f \nearrow$, concave (rendements d'échelle décroissantes) et $f(0) = 0$. Sans la firme ils produisent 0.

$$\uparrow \quad v(S) = \begin{cases} N = \{0, 1, \dots, K\} & \text{si } 0 \notin S \\ 0 & f(|S| - 1) \quad \text{si } 0 \in S \end{cases}$$

Cœur :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_K = f(K) \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \tag{3}$$

$$x(S) \geq f(|S| - 1) \quad \text{si } 0 \in S \tag{4}$$

$$(4) \Rightarrow x(N \setminus i) \geq f(K - 1) \quad \forall i \neq 0 \xrightarrow{(2)} f(K) - x_i \geq f(K - 1) \Rightarrow x_i \leq f(K) - f(K - 1) \quad \forall i \neq 0$$

On a montré que $x \in \text{coeur} \Rightarrow x \text{ appartient à l'ensemble}$

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_K = f(K) \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \quad (3)$$

$$x_i \leq f(K) - f(K-1), \quad i = 1, \dots, K \quad (5)$$

Montrons la réciproque : soit x dans cet ensemble

Si $0 \notin S$ alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$

Si $0 \in S$ alors $x_i \leq f(K) - f(K-1) \quad \forall i \in N \setminus S \Rightarrow x(N \setminus S) \leq (K-k)(f(K) - f(K-1))$, où $k = |S| - 1 = \text{nb de travailleurs dans } S$

$$\Rightarrow x(S) \geq f(K) - (K-k)(f(K) - f(K-1)) \stackrel{\text{concavité}}{\geq} f(k) = v(S)$$

Conclusion : Chaque travailleur reçoit au maximum sa productivité marginale lorsque tous les travailleurs sont employés, et le propriétaire reçoit le reste

Syndicalisation de tous les travailleurs

- ↳ Seul le groupe des K travailleurs accepte de travailler

$$\Rightarrow v(S) = \begin{cases} f(K) & \text{si } S = N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{coeur} = \{(x_0, x_1, \dots, x_K) : x_i \geq 0 \ \forall i, \sum x_i = f(K)\}$$

Principaux défauts de la notion de cœur

- ① Souvent trop grand
- ② Souvent vide
- ③ Prédictions parfois trop extrêmes et / ou instables
 - Ex : Pas de différence entre dictateur et droit de veto
 - Ex : Jeu des souliers

Le jeu des souliers.

2 joueurs, $i = 1, 2$, ont chacun une chaussure gauche

1 joueur, $i = 3$, a une chaussure droite

$v(S) = 1 \text{ €}$ par paire de chaussures que la coalition S peut réaliser

Cœur :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Cœur} = \{(0, 0, 1)\}$$

De même, si

1 000 001 joueurs ont chacun une chaussure gauche
 1 000 000 joueurs ont chacun une chaussure droite
 alors l'unique répartition du cœur donne 1 € à tous ceux qui ont une chaussure droite, et rien à ceux qui ont une chaussure gauche

► Rareté relative (même minime) des chaussures droites \Rightarrow prix nul des chaussures gauches (effet concurrentiel)

La valeur de Shapley donne un peu plus que 0.5 aux chaussures droites et un peu moins que 0.5 aux chaussures gauches